

# Método de Bielas y Tirantes

Comisión 1  
Grupo de Trabajo 1/3  
Bielas y Tirantes

Enero de 2003



GEHO - ATEP

# Presentación

---

La publicación de la Instrucción de hormigón EHE en 1998, ha supuesto la incorporación por primera vez en la normativa española de forma explícita del método de bielas y tirantes. Con éste motivo, ACHE decidió formar el Grupo de Trabajo 1/3 dentro de la Comisión 1 (Proyecto), con objeto de realizar una monografía que sirviera para la difusión de las bases teóricas y explorara las aplicaciones del método de Bielas y Tirantes, en el proyecto de elementos de hormigón estructural.

La presente monografía preparada por el Grupo de Trabajo está subdividida en dos partes: Teoría y Práctica. Dentro de la parte teórica, se describe la evolución histórica, los fundamentos del método, así como su tratamiento en la normativa española e internacional. También se incluyen una serie de criterios que permiten la aplicación práctica del método.

En la parte práctica se presentan una colecciones de modelos de bielas y tirantes típicos de diversos elementos estructurales que se agrupan en:

- Cimentaciones
- Zonas de introducción del pretensado
- Edificación
- Puentes

Así mismo, se han incluido un total de 9 ejemplos, que se han desarrollado hasta el nivel de croquis de armaduras. Estos ejemplos se han agrupado en:

- EC: Ejemplos de cimentaciones
- EE: Ejemplos de edificación
- EP: Ejemplos de puentes.

La monografía presenta de forma nítida las ventajas e inconvenientes de la aplicación del método, que constituye sin duda una herramienta de gran utilidad en el proyecto de elementos de hormigón estructural.

Quiero expresar mi agradecimiento todos los miembros del Grupo de Trabajo por su colaboración en las discusiones previas y por los trabajos realizados para la redacción del presente documento. Quiero mostrar mi reconocimiento a Álvaro García Meseguer y a José Antonio González Neijide por su paciencia en los trabajos de revisión del documento, a Marta Heras por su colaboración en los trabajos de mecanografía y a Hugo Camdessus por la preparación de las figuras.

Por último quiero agradecer de forma especial a Fernando Rodríguez García, presidente de la Comisión 1, su confianza y apoyo entusiasta sin los que no habría sido posible la realización de éste documento.

José Romo Martín  
COORDINADOR DEL GRUPO DE TRABAJO  
BIELAS Y TIRANTES

## **Grupo de Trabajo 1/3 Bielas y Tirantes**

### **Coordinador:**

José Romo Martín

FHECOR Ingenieros

### **Miembros:**

Carlos Bajo Pavía

Juan Luis Bellod Thomas

Jesús José Corbal Álvarez

Miguel Cortijo Santurino

Pascual García Arias

Jesús Gómez Hermoso

Ramón López Mendizabal

Conchita Lucas Serrano

Antonio José Madrid Ramos

Raúl Rubén Rodríguez Escribano

Luis Miguel Viartola Laborda

Miguel Ángel Vicente Cabrera

Ferrovial-Agromán

CESMA

THEMA

INCOSA

IDOM

FCC Construcción

FHECOR Ingenieros

ACS

CEDEX

INTEMAC

ACS

E.T.S.I.C.C.P. Burgos

# ÍNDICE

## TEORÍA

1.	INTRODUCCIÓN HISTÓRICA	4
1.1.	El método de bielas y tirantes en los albores del hormigón estructural	4
1.2.	Desarrollo del método en los años 1950-70. (Torsión, rasante, cargas concentradas)	5
1.3.	Desarrollo de la teoría de campos de tensiones, generalización del método de regiones B y D	7
1.4.	Evolución del método en la normativa española	7
2.	FUNDAMENTOS TEÓRICOS	9
2.1.	Antecedentes y fundamentos del método	9
2.2.	Descripción del método	10
2.2.1.	Regiones B y regiones D	10
2.2.2.	Bielas y tirantes	12
2.3.	Bases teóricas	13
2.3.1.	Teorema del mínimo de la plasticidad	14
2.3.2.	Principio de St. Venant	14
2.4.	Campo de aplicación del método	15
2.5.	Planteamiento del método	15
2.5.1.	Identificación de regiones	15
2.5.2.	Creación del modelo	16
2.6.	Elementos del modelo	17
2.6.1.	Bielas	17
2.6.2.	Tirantes	21
2.6.3.	Nudos	22
3.	EL MÉTODO DE BIELAS Y TIRANTES EN LA NORMATIVA	23
3.1.	Instrucción de Hormigón Estructural EHE 1998	23
3.2.	Código Modelo CEB-FIP 1990	24
3.3.	Eurocódigo 2	24
3.4.	Société Suisse des Ingénieurs et des Architectes (SIA)	25
3.5.	ACI (American Concrete Institute)	25
3.6.	Normenausschuss Bauwesen im DIN (Deutsches Institut für Normung)	25
3.7.	AASHTO - 1999	25
3.8.	RESUMEN	26
4.	CRITERIOS DE PROYECTO	28
4.1.	Introducción	28
4.2.	Criterios de elección de mecanismos resistentes	28
4.2.1.	Sistemas resistentes isostáticos e hiperestáticos	29
4.2.2.	Sistemas con longitud mínima de tirantes	30
4.2.3.	Trazado de bielas: ángulos de dispersión, ángulos mínimos entre elementos del modelo	31
4.3.	Criterios para la definición de nudos	32
4.4.	Procedimiento para la aplicación del método	35
4.5.	Sistemas principales y sistemas secundarios	38
5.	BIBLIOGRAFÍA	39

**PRÁCTICA**

INTRODUCCIÓN .....	42
--------------------	----

**CAPÍTULO I. COLECCIONES DE MODELOS .....43**

1. CIMENTACIONES.....	44
1.1. Zapatas rígidas.....	44
1.2. Encepados rígidos.....	48
2. ZONAS DE INTRODUCCIÓN DEL PRETENSADO.....	50
2.1. Anclaje de armaduras pretesas.....	51
2.2. Anclaje de armaduras postesas .....	52
3. EDIFICACIÓN .....	55
4. PUENTES.....	57
4.1. Introducción del pretensado en zonas interiores.....	57
4.2. DIAFRAGMAS.....	68
4.2.1. Diafragmas de sección cajón con apoyos situados bajo las almas .....	59
4.2.2. Diafragmas de sección cajón con apoyo único .....	60
4.2.3. Diafragmas en uniones monolíticas tablero-pila.....	61
4.2.4. Diafragmas de estribos.....	62
4.2.5. Diafragmas en tablero con sección en forma de pí .....	63
4.3. Cabecerosdepilas.....	64

**CAPÍTULO II. EJEMPLOS DE APLICACIÓN .....67****CIMENTACIONES**

EC1. Zapata sometida a flexión recta .....	68
EC2. Zapata sometida a flexión esviada.....	85
EC3. Encepado de 6 pilotes.....	97
EC4. Encepado de pantalla contraviento .....	120

**EDIFICACIÓN**

EE.1. Ménsula corta .....	132
EE.2. Viga pared .....	146
EE.3. Viga con cambio de canto .....	159

**PUENTES**

EP.1. Diafragma sección cajón .....	167
EP.2. Dintel pila de puente.....	176

## PARTE I. TEORÍA

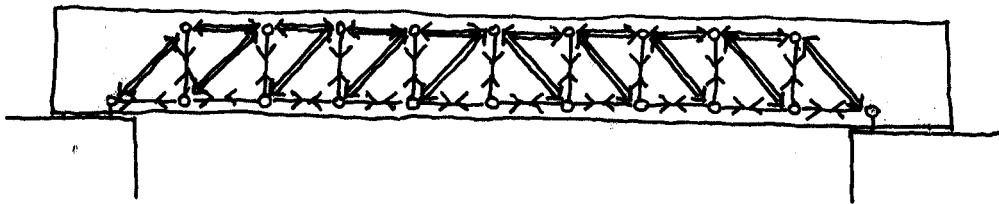
## 1. INTRODUCCIÓN HISTÓRICA

### 1.1. El método de bielas y tirantes en los albores del hormigón estructural

El método de las bielas y tirantes es prácticamente tan antiguo como el hormigón estructural.

La primera referencia bibliográfica de que se dispone sobre la aplicación del método para la descripción del comportamiento de un elemento de hormigón armado, consiste en la explicación dada por Ritter [\*] en 1899 para el funcionamiento a cortante de una viga simplemente apoyada sometida a una carga uniformemente distribuida.

Según Ritter la viga funciona como una estructura articulada formada dos cordones longitudinales, uno superior que trabaja a compresión, y uno inferior traccionado. Además existen dos series de elementos, unos verticales que trabajan a tracción y otros en diagonal que trabajan a compresión, los cuales transmiten el cortante hasta los apoyos.



*Figura 1.1.1. Celosía de Ritter*

No cabe duda de que el autor tenía en mente una tipología estructural usada profusamente en su época: las celosías metálicas isostáticas formadas por barras biarticuladas, cuyo comportamiento y análisis estructural era bien conocido por los ingenieros de su tiempo. He aquí un hecho constatado en el desarrollo de la ingeniería, como es el trasvase del conocimiento de unos a otros materiales o entre tipologías.

Una década más tarde Mörsch [\*] avanzó algo más en la explicación del comportamiento a cortante de una viga de hormigón estructural, indicando que el mecanismo que regía el funcionamiento a cortante era algo más complejo, ya que en lugar de diagonales comprimidas localizadas, existían campos de compresiones, cuyas componentes verticales se iban equilibrando con las tracciones resistidas por los cercos verticales. Se introducía así el concepto de campo de compresiones.

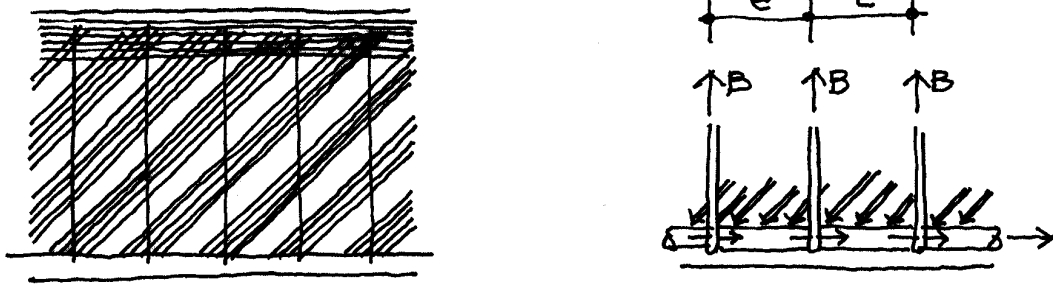


Figura 1.1.2. Celosía de Mörsh

## 1.2. Desarrollo del método en los años 1950-70. (Torsión, rasante, cargas concentradas)

Esta forma de explicación del funcionamiento de una viga se generalizó a otros fenómenos, como la torsión (figura 1.2.1), el rasante (figura 1.2.2), las cargas concentradas, las vigas de gran canto (figura 1.2.3) etc. Estos desarrollos se producen gracias a la aportación teórica y la experimentación desarrollada por el propio Mörsh y otros autores posteriores como Thürlimann, Leonhardt y otros.

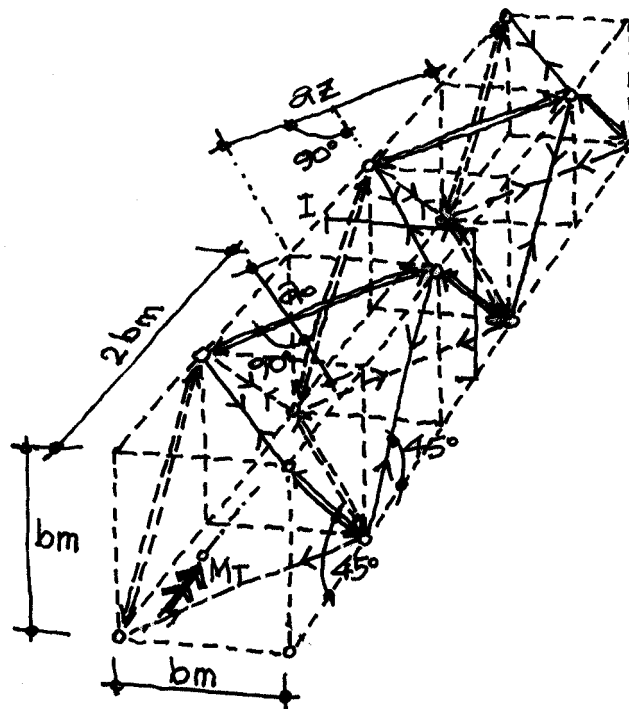


Figura 1.2.1. Celosía para explicar el comportamiento a torsión (Leonhardt)



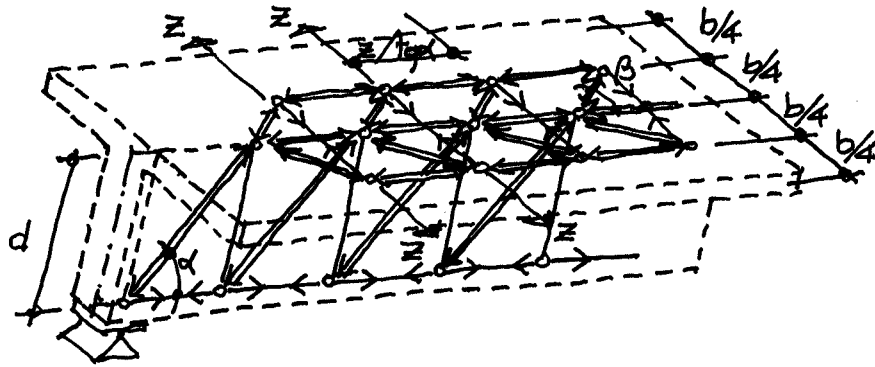


Figura 1.2.2. Modelo de bielas y tirantes para explicar el diseño a rasante

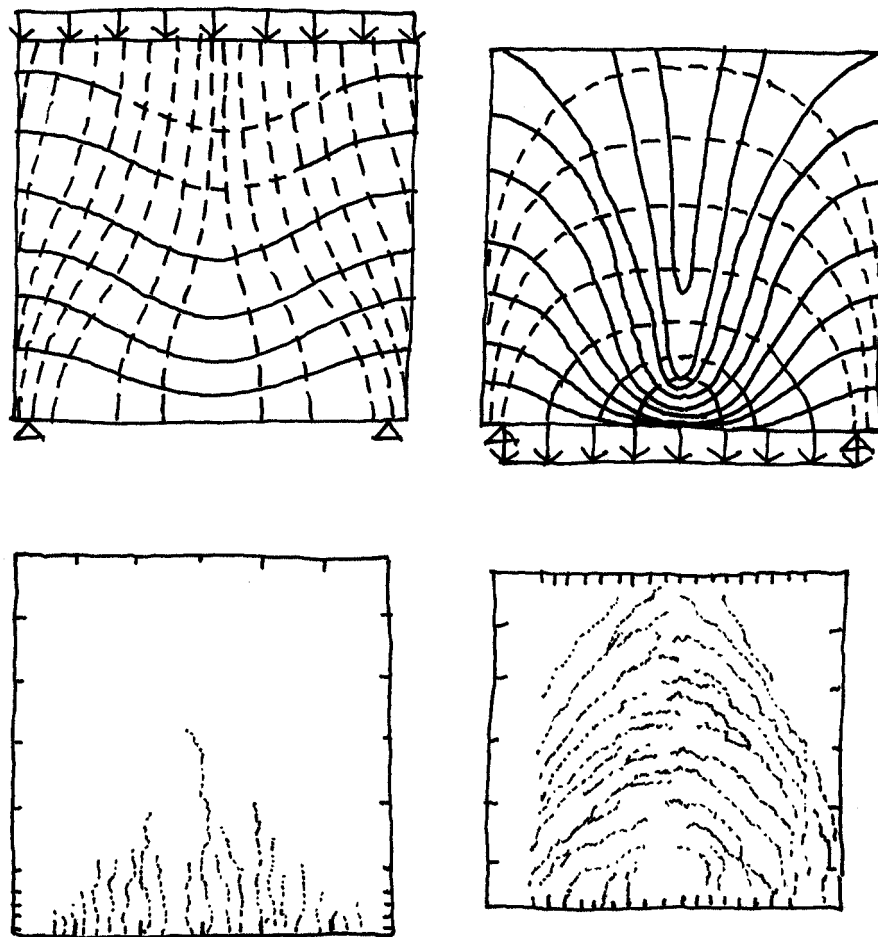


Figura 1.2.3. Experimentación del Leonhardt (años 60)

### 1.3. Desarrollo de la teoría de campos de tensiones, generalización del método de regiones B y D

Durante los años 80, los trabajos de P.Marti y J.Schlaich han tratado de compatibilizar y aunar el tratamiento dado a las regiones B y D.

En especial los trabajos de Collins [\*] basados en una abundante experimentación, sobre la determinación de la capacidad del hormigón de elementos sometidos a estados de tracción oblicua, han permitido el desarrollo de la teoría de los campos de compresiones y la obtención de una formulación continua para elementos de hormigón armado fisurado sometido a tensiones normales y tangenciales planas (figura 1.3.1).

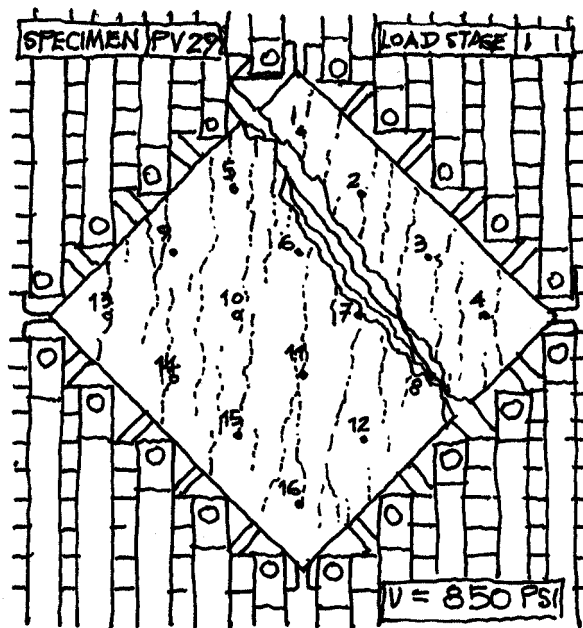


Figura 1.3.1. Experimentación de campos de compresiones (Collins)

### 1.4. Evolución del método en la normativa española

Las regiones D no son tratadas por la normativa española hasta la Instrucción de 1968 [\*], en la que aparecen, las cargas concentradas sobre macizos, las zapatas rígidas y las vigas de gran canto, para las que se utilizan otros criterios de diseño.

Puede decirse que con la EH-80 [\*] aparece ya de forma implícita el método de las bielas y tirantes, tanto en el texto como en algunas figuras (figura 1.4.1.).

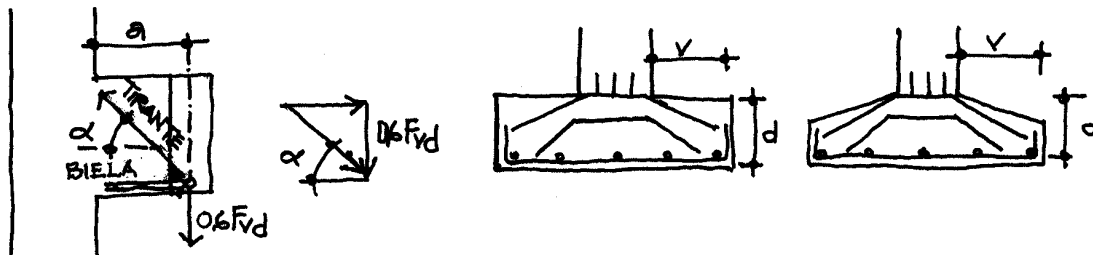


Figura 1.4.1. Bielas y tirantes en la EH-80

Sin embargo es con la Instrucción EHE, publicada en 1998, cuando la normativa española introduce de forma explícita el método de bielas y tirantes (en adelante, MTB), y su aplicación a las regiones B, D y elementos estructurales.

La presente monografía recoge los postulados principales del MBT incluidos en la EHE-1998, y su aplicación a diversos elementos estructurales.

## 2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

### 2.1. Antecedentes y fundamentos del método

El método de las bielas y tirantes es un procedimiento que permite el diseño de elementos lineales, superficiales o volumétricos de elementos de hormigón estructural. El método incluye una parte de análisis estructural y otra de dimensionamiento, en la que se realiza la comprobación del hormigón y el diseño de la armadura.

Durante la primera fase de análisis, la estructura se idealiza mediante un sistema (plano o espacial) de barras biarticuladas, que intenta representar el comportamiento de la estructura o de parte de ella.

Por tratarse de sistemas biarticulados, los elementos que los componen trabajan a tracción o compresión puras. En la nomenclatura clásica del método, los elementos (barras) comprimidos se denominan *bielas*, mientras que los *tirantes* corresponden a las barras traccionadas. Las zonas de unión entre bielas, entre tirantes o entre unos y otras se denominan *nudos* (figura 2.1.1).

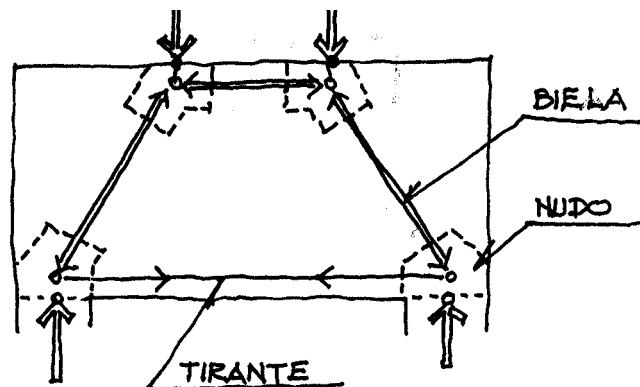


Figura 2.1.1. Terminología y simbología

El método es válido para el diseño en Estado Límite Último de Agotamiento y está basado en la Teoría de la Plasticidad; el Estado Límite de fisuración se comprueba de forma indirecta, limitando la tensión de trabajo de la armadura en ELU y aplicando otros criterios de proyecto que se definen 2.6.2. y 4.

Este método es el más adecuado para el dimensionamiento de aquellas zonas, presentes en muchos elementos estructurales, en las que la distribución de deformaciones es no lineal, zonas denominadas en adelante *regiones D* o de discontinuidad.

El método de bielas y tirantes es un método simplificado, ya que no tiene en cuenta efectos tales como la rigidez del hormigón entre fisuras, el efecto pasador de la armadura, etc.

El método es la base de la formulación de muchas expresiones que permiten el diseño y comprobación en ELU de tensiones tangenciales (cortante, rasante, torsión) en las *regiones tipo B* (que son aquellas en las que sigue siendo válida la Ley de Bernoulli/Navier o de deformación plana). No obstante, estas formulaciones están corregidas para adecuarlas a

los resultados experimentales, como sucede por ejemplo en el caso del dimensionamiento a esfuerzo cortante.

## 2.2. Descripción del método

### 2.2.1. Regiones B y regiones D

En el proyecto y dimensionamiento de una estructura de hormigón, las comprobaciones de los elementos asimilables a vigas sometidos a tensiones normales se realizan mediante métodos en los que se acepta la hipótesis de Bernoulli-Navier, por la que las secciones planas normales a la directriz se mantienen planas al deformarse.

Las comprobaciones relativas a tensiones tangenciales en vigas se basan en fórmulas deducidas de la asimilación del problema a un modelo resistente de celosía. Las formulaciones más simples de estos modelos idealizan el comportamiento resistente de una pieza sometida a cortante mediante unos elementos comprimidos de hormigón y unos elementos traccionados de acero, que forman una celosía plana.

Existe un último grupo de comprobaciones que se basan en la teoría de elasticidad, en fórmulas empíricas o en *reglas de buena práctica*. Se trata de las aplicadas a partes de una estructura cuyo comportamiento no es asimilable a una viga, por ejemplo nudos, zonas bajo cargas concentradas, ...

La posibilidad de aplicar o no la hipótesis de Bernoulli-Navier en cada zona de una estructura clasifica a éstas como región B o región D, respectivamente.

Por tanto, se define como región B una zona de la estructura en la que es válida la hipótesis de Bernoulli-Navier. Por el contrario, se define como región D (regiones de discontinuidad), aquella parte de la estructura en la que no es válida la aplicación de la hipótesis de Bernoulli-Navier. En la figura 2.2.1.1 se propone un ejemplo en el que se distinguen las regiones B y regiones D de una determinada estructura.

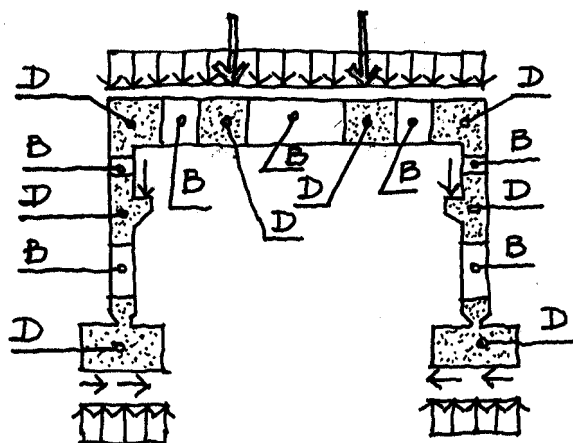


Figura 2.2.1.1. Ejemplo de regiones B y regiones D en un pórtico

Se distinguen tres tipos de regiones D o de discontinuidad:

– *Discontinuidades geométricas*

Se trata de aquellos casos en los que la geometría de la pieza se aleja del elemento viga prismático. Un ejemplo de este tipo es un cambio brusco de sección en una estructura. En la figura 2.2.1.2 se recoge una región D de este tipo, donde se aprecia claramente que pretender aplicar las distribuciones de tensiones y deformaciones que se deducen de la hipótesis de Bernoulli-Navier a ambos lados del cambio de sección llevaría a resultados erróneos.

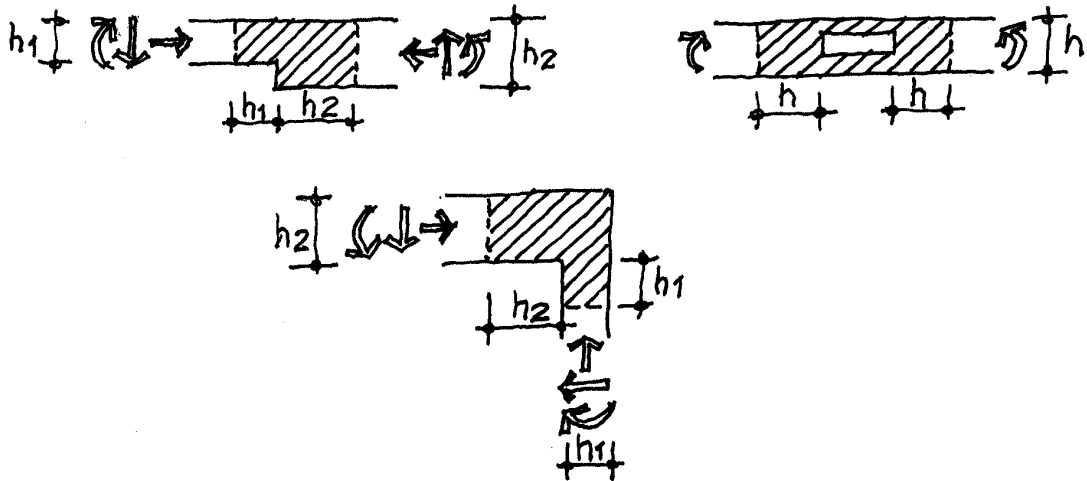


Figura 2.2.1.2. Ejemplos de discontinuidad geométrica

El caso de un nudo, por ejemplo las esquinas del pórtico de la figura 2.2.1.2. es también una discontinuidad geométrica, ya que en su interior se produce un flujo de tensiones que infringe la hipótesis de planeidad en la deformación de la sección.

– *Discontinuidades estáticas*

También son llamadas discontinuidades mecánicas. Una discontinuidad estática es el resultado de la aplicación de una carga puntual o concentrada. El flujo de tensiones inducido por la carga no responde, en una determinada zona, a la hipótesis de Bernoulli-Navier, sino que suele ser un flujo con una distribución tensional y de deformaciones compleja (se presentan algunos ejemplos en la figura 2.2.1.3.). En la figura 2.3.2.1. se muestran las isostáticas del extremo de una viga en el cual se ancla un tendón de pretensado. En la parte inferior hay un apoyo, lo que añade una discontinuidad estática adicional. Se puede comprobar la diferencia entre las isostáticas regularizadas del extremo derecho de la figura (región B) y las isostáticas de la región D.

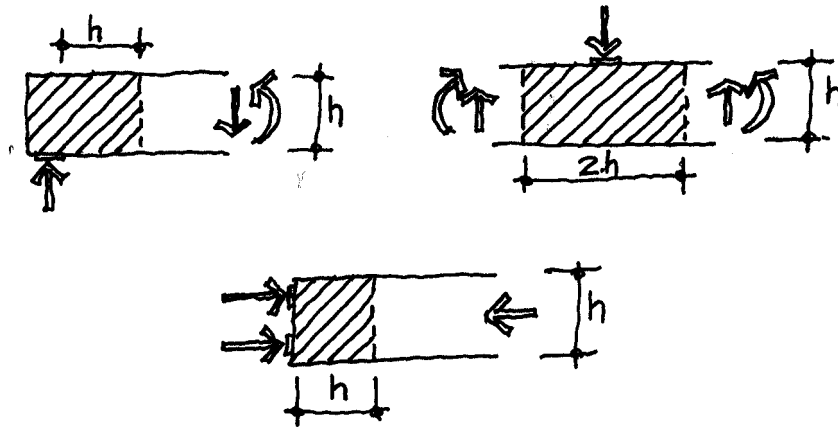


Figura 2.2.1.3. Ejemplos de discontinuidad estática (o mecánica)

– *Discontinuidad generalizada*

A diferencia de los tipos expuestos anteriormente, que correspondían a zonas determinadas de una estructura en las que localmente no se puede aplicar la hipótesis de Bernoulli-Navier por una única causa, hay casos en los que confluyen varios factores: discontinuidades geométricas y estáticas; por ejemplo, el caso de una viga de gran canto o de una zapata rígida (figura 2.2.1.4).

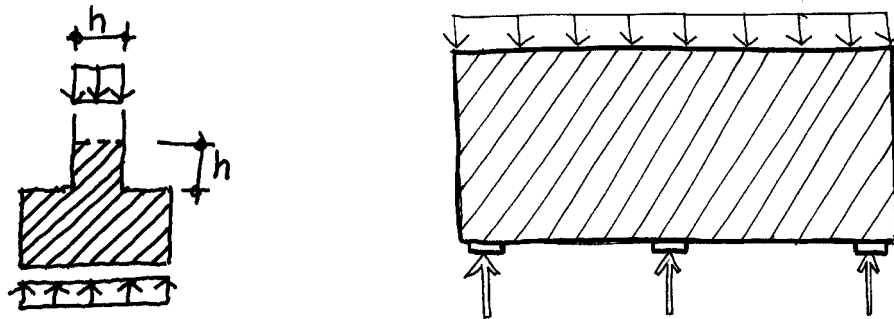


Figura 2.2.1.4 Ejemplos de discontinuidad generalizada

## 2.2.2. Bielas y tirantes

Como ya se ha expuesto, el método de las bielas y tirantes es un procedimiento de análisis que con un grado de aproximación adecuado permite conocer el comportamiento de determinadas zonas de una estructura.

Los elementos de que se compone el método son las bielas, los tirantes y los nudos que resultan de los cruces entre ambos.

Las bielas son los elementos resistentes del modelo sometidos a compresión. Generalmente, y debido a las características resistentes de los materiales, lo más adecuado es materializarlas en hormigón. Pueden considerarse como la resultante de los campos de compresión que aparecen en el hormigón.

Los tirantes corresponden a las barras traccionadas del modelo, por lo que suelen ser elementos de acero dentro del cuerpo de una estructura de hormigón.

Los nudos surgen como intersección de bielas o tirantes en cualquier combinación y geometría. Son elementos delicados del modelo que han de garantizar su integridad bajo las compresiones localizadas a que se ven sometidos, y el anclaje de los tirantes que en él confluyen.

En los siguientes apartados se estudiarán más detenidamente estos elementos, tratando de definir sus características resistentes.

### 2.3. Bases teóricas

El método de las bielas y tirantes tiene su fundamento en la teoría de la plasticidad.

En general, la teoría de la plasticidad supone que el material tiene un comportamiento rígido-plástico, esto es, no se deforma hasta que llega a una tensión, denominada tensión de fluencia, a partir de la cual se deforma indefinidamente sin incremento de tensión. Este tipo de comportamiento es una simplificación del comportamiento real. En la figura 2.3.0.1. se muestran los diagramas tensión/deformación para un material rígido-plástico y para el hormigón.

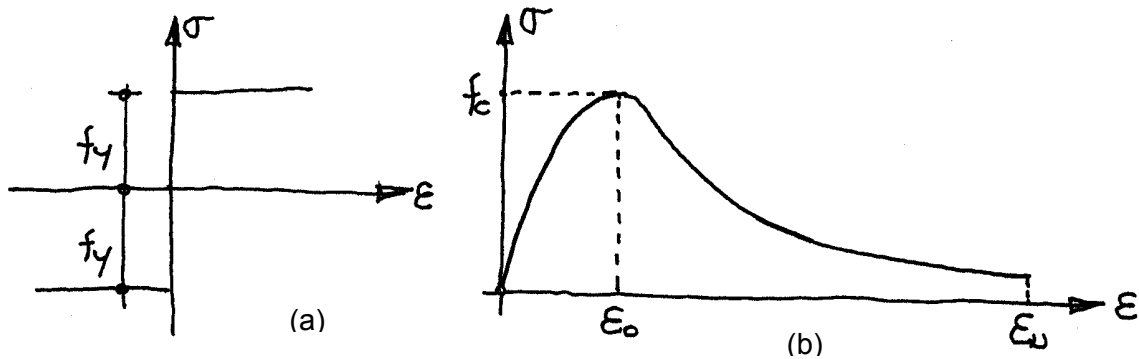


Figura 2.3.0.1. Diafragmas  $\sigma$ - $\epsilon$  de un material rígido-plástico (a) y del hormigón (b)

Se puede apreciar con claridad que el hormigón tiene una capacidad de deformación residual después de alcanzar su resistencia máxima, aunque su tensión disminuye considerablemente. Las aplicaciones de la teoría de la plasticidad al análisis del hormigón corrigen esta falta de concordancia utilizando como tensión de fluencia en el diagrama rígido-plástico, una tensión menor que la de rotura. Con esto se consigue una buena correlación entre los resultados numéricos y la experimentación.

El enfoque de un problema mediante métodos plásticos de análisis es diferente a los recogidos hasta ahora en las distintas normativas, y solo puede aplicarse en el E.L.U. de Agotamiento.



Los dos principios básicos en los que se fundamenta el método de bielas y tirantes son el teorema del mínimo de plasticidad y el Principio de Saint-Venant. Ambos se enuncian a continuación:

### **2.3.1. Teorema del mínimo de la plasticidad**

El teorema del mínimo de la plasticidad afirma que si, para una determinada carga, se halla una distribución de tensiones que:

- en ningún punto superen las tensiones de fluencia de los materiales
- satisfaga las condiciones de equilibrio estático
- satisfaga las condiciones de contorno,

la estructura resistirá dicha carga sin llegar a la rotura.

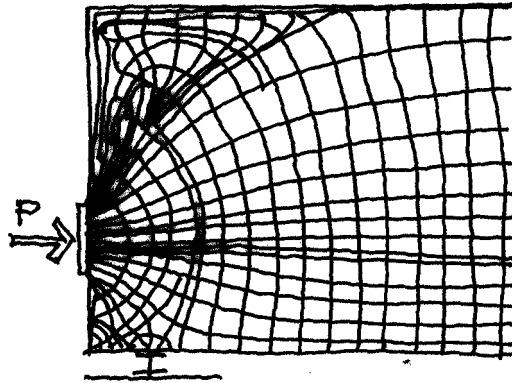
Hay que destacar que el teorema no exige que se halle la distribución de tensiones real. Basta con hallar un mecanismo resistente viable para que pueda asegurarse que la estructura resistirá la carga sin colapsar.

### **2.3.2. Principio de St. Venant**

De acuerdo con el principio de St. Venant la aplicación de una fuerza concentrada (o distribuida, siempre que tenga la misma resultante) en un determinado punto de una pieza conduce a resultados equivalentes en cualquier sección de la pieza más allá de una determinada distancia. Es decir, se llegan a uniformizar las tensiones producidas por una discontinuidad estática a una determinada distancia de la misma, que suele corresponder generalmente a un canto de la pieza, alcanzando la misma distribución que tendrían si en lugar de existir dicha discontinuidad se hubiese sometido la pieza a una carga uniforme de resultante equivalente.

Por tanto, una primera consecuencia de este principio es que las regiones D, de acuerdo con las leyes de la elasticidad, son finitas y de pequeña extensión.

Otra de las consecuencias de la aplicación del principio de St. Venant es la justificación teórica de que se pueda calcular una estructura según la teoría general de flexión, desde la obtención de esfuerzos hasta el dimensionamiento de secciones, y aplicando un tratamiento especial sólo en los nudos u otras zonas de discontinuidad.



*Figura 2.3.2.1. Red de isostáticas en el extremo de una viga en el cual se ancla un tendón de pretensado*

## **2.4. Campo de aplicación del método**

Cuando se realiza un cálculo elástico de un modelo de barras para determinar los esfuerzos en cada sección de una estructura, no se tiene en cuenta de forma explícita la existencia de regiones D.

Si el tamaño de las regiones D resultase ser una parte significativa de la estructura, despreciar su influencia en la determinación del estado tensional sería erróneo. Por tanto resulta tan importante determinar el tamaño de las regiones D como discernir entre las zonas analizables como regiones B o regiones D.

La principal aplicación del método se encuentra en el análisis de las regiones D, aunque su utilización puede hacerse extensiva al estudio de regiones B, llegando a constituir, de hecho, un método de análisis integral de una estructura.

En las regiones D, como se verá más adelante, el método de bielas y tirantes proporciona herramientas para el análisis que permiten conocer el comportamiento de esa zona de la estructura con un buen grado de aproximación respecto del comportamiento real.

Hay que señalar que, debido a su fundamento en la Teoría de la Plasticidad, basada en diagramas tensión-deformación de tipo rígido-plástico, el método no es capaz de dar una explicación exacta al problema estructural; simplemente se limita a aportar una solución válida, pero aproximada, para dotar a la estructura de la capacidad resistente necesaria para soportar su estado de cargas.

## **2.5. Planteamiento del método**

### **2.5.1. Identificación de regiones**

En primer lugar, se han de identificar los límites de la región D a estudiar, estableciéndose los esfuerzos o acciones en la frontera de ésta.

En general, debe realizarse un análisis elástico global de la estructura, para posteriormente analizar con el MBT la región D en cuestión.

### **2.5.2. Creación del modelo**

La creación de un modelo de bielas y tirantes consiste en la sustitución de una estructura, o parte de ella, por una estructura de barras articuladas, bien plana o espacial, que represente de forma equivalente su comportamiento.

En primer lugar hay que destacar que debe tenderse a modelos sencillos que representen con claridad el comportamiento real de la estructura.

De acuerdo con el Teorema del mínimo de la Plasticidad, es posible encontrar para una estructura dada con un determinado caso de carga, una distribución de tensiones que, dentro de los límites de resistencia de los materiales constitutivos, cumpla las condiciones de equilibrio estático y las condiciones de apoyo. Si esto ocurre, la estructura resistirá dicha carga sin alcanzar el límite de rotura.

Una de las consecuencias de la aplicación de este Teorema es que el modelo de bielas y tirantes, además de la geometría, depende de las cargas aplicadas.

Para la creación del modelo, el primer paso consiste en dotar a la estructura de un sistema resistente capaz de soportar los casos de carga a que vaya a estar sometida.

De lo expuesto anteriormente puede deducirse que el modelo, o sistema resistente, no es único. En efecto, pueden encontrarse diversas disposiciones de bielas y tirantes que satisfagan estructuralmente el problema resistente.

En principio, de todos los posibles modelos que puedan plantearse para resolver un determinado problema, el sistema resistente que llevaría al modelo óptimo es aquel que minimiza la energía de deformación.

El modelo planteado ha de ser resoluble. Esto obliga a que los modelos propuestos, generalmente de celosía, sean estructuras isostáticas internas, por lo que ha de tenderse a triangular el modelo.

Se pueden encontrar esquemas resistentes que, para un determinado caso de carga, satisfagan las condiciones estáticas del problema con una estructura que internamente es un mecanismo.

Hay que abandonar modelos con ángulos entre bielas y tirantes inferiores a  $30^\circ$ .

Es válido el principio de superposición. De hecho, se recomienda que los casos de carga complicados se estudien independientemente en modelos más sencillos, para posteriormente obtener la sollicitación de un tirante, biela o nudo como la suma de los estados aislados.

Para establecer el esquema resistente de bielas y tirantes es de gran utilidad conocer la distribución elástica de tensiones en el cuerpo de la estructura. Para ello puede confrontarse el análisis mediante un modelo con el método de elementos finitos en régimen elástico, o contar con una serie de patrones basados en la experiencia.

## 2.6. Elementos del modelo

Como se ha descrito anteriormente, el modelo se compone de una serie de barras articuladas en sus extremos. Cuando estas barras trabajan a compresión reciben el nombre de *bielas*, cuando lo hacen a tracción el de *tirantes*, y se denominan *nudos* a los elementos de unión entre bielas y/o tirantes.

A continuación se describen más detalladamente estos elementos.

### 2.6.1. Bielas

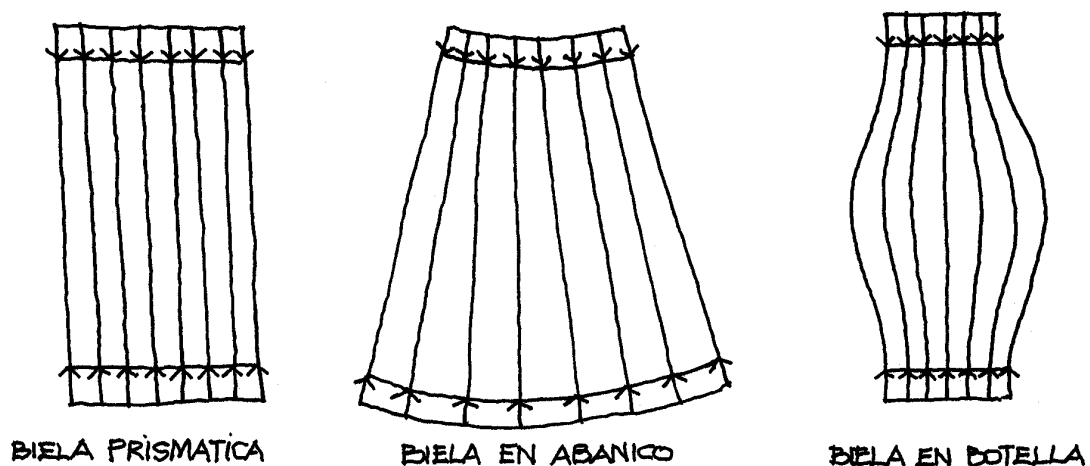
Son los elementos resistentes del modelo sometidos a compresión. Generalmente, y debido a las características resistentes de los materiales, lo más adecuado es materializarlas sólo en hormigón.

No obstante, hay bielas que además del hormigón pueden contar con armaduras comprimidas, como modo de aumentar su resistencia.

A continuación se describen las distintas tipologías de bielas, desde el punto de vista geométrico. Posteriormente se analiza la capacidad resistente de las mismas.

#### ***Geometría de las bielas.***

En la figura 2.6.1.1. se muestran los tres tipos básicos de bielas.



*Figura 2.6.1.1 Tipos de bielas*

Las bielas prismáticas se producen en aquellos casos en que existe una limitación bien física bien mecánica a la disposición de las compresiones, como podría ser el caso del cordón comprimido de una viga sometida a flexión.

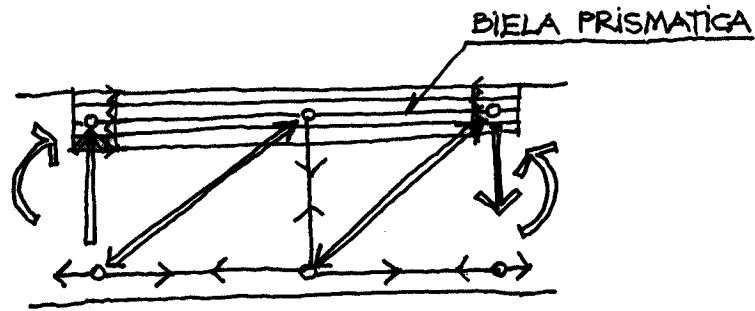


Figura 2.6.1.2 Ejemplo de biela prismática

Las bielas en abanico se producen cuando existe la posibilidad de dispersión de los campos de compresiones.

Un ejemplo de esta tipología se produce en el caso de apoyo extremo de una viga.

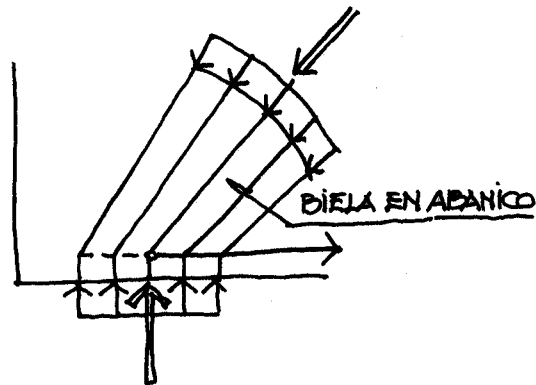


Figura 2.6.1.3. Ejemplo de biela en abanico

Las bielas en botella se producen cuando existe la posibilidad de dispersión bidimensional de las compresiones, como ocurre por ejemplo en el caso de cargas sobre macizos (figura 2.6.1.4).

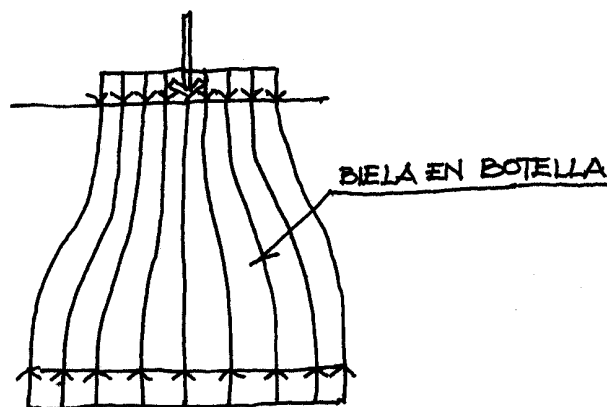


Figura 2.6.1.4. Ejemplo de biela en botella

### ***Capacidad resistente de las bielas.***

La capacidad resistente de una biela vendrá determinada directamente por el área de hormigón colaborante y la resistencia que se adopte para el mismo, en adelante  $f_{1cd}$ . Por tanto:

$$C_d = A_c \cdot f_{1cd}$$

El valor a adoptar para la tensión de trabajo del hormigón que constituye una biela depende de dos factores fundamentales: la resistencia a compresión del hormigón y el estado tensional transversal a la biela.

El valor de la compresión que define la capacidad de un hormigón es el obtenido en ensayo monoaxial de una probeta. Es evidente que este valor, resultado de un ensayo ideal, representa un límite superior de la capacidad del hormigón de una biela, por sí solo. En principio, y como el análisis se efectúa en E.L.U. de agotamiento, el valor máximo de referencia para la resistencia del hormigón vendrá definido por

$$f_{1cd} = 0.85 \cdot f_{cd}$$

Además, un mismo hormigón en bielas de idéntica geometría puede tener distinta capacidad resistente en función del estado de tensiones transversal a la biela, de la cuantía de armadura transversal que la atraviesa, e incluso del posible confinamiento de la misma por medio de cercos cerrados.

En este aspecto, la Instrucción EHE [\*] en su artículo 40º recoge varios valores discretos para la resistencia del hormigón de las bielas teniendo en cuenta los condicionantes anteriores. Así, se definen cuatro tipos de bielas con unos valores determinados para la capacidad del hormigón:

#### ***a) Bielas de hormigón en zonas con estados de compresión uniaxial***

La capacidad resistente del hormigón en este caso alcanza el valor de referencia, pues el trabajo del hormigón se corresponde con las condiciones del ensayo con el que se obtiene. Por tanto,

$$f_{1cd} = 0.85 \cdot f_{cd}$$

#### ***b) Bielas de hormigón con fisuración oblicua o paralela a la biela***

Se trata de las bielas en las que el campo de compresiones puede presentar fisuración oblicua o paralela a la dirección de la biela, o lo que es lo mismo, a la dirección de las compresiones. Como la rotura por compresión del hormigón no es otra cosa que una rotura por tracción indirecta, queda patente que en estos casos la capacidad resistente del hormigón queda sensiblemente reducida. Así, y en la medida en que la fisuración sea más importante, menor será la resistencia a compresión del hormigón de la biela.

Como forma de simplificar el problema, la citada Instrucción da tres valores puntuales como límite inferior a un amplio abanico de situaciones que se agrupan a su vez en tres tipos:

b-1) Bielas con fisuración paralela a su eje y armadura transversal suficientemente anclada.

$$f_{1cd} = 0.70 \cdot f_{cd}$$

b-2) Bielas con fisuración paralela a su eje de abertura controlada, por armadura transversal suficientemente anclada.

$$f_{1cd} = 0.60 \cdot f_{cd}$$

b-3) Bielas con fisuración paralela a su eje de gran abertura.

$$f_{1cd} = 0.40 \cdot f_{cd}$$

*c) Bielas de hormigón con armaduras comprimidas*

De forma adicional a la resistencia del hormigón, en una biela puede contarse con la resistencia de la armadura pasiva siempre que ésta se sitúe en el interior del campo de compresiones y en posición paralela a las mismas, y exista armadura transversal suficiente para evitar fenómenos de pandeo.

En este caso, el incremento de capacidad resistente de la biela vendrá definido por

$$\Delta C_d = A_{sc} \cdot \sigma_{sd,c}$$

donde  $A_{sc}$  es el área de acero comprimido y  $\sigma_{sd,c}$  es el valor que se adopta para la tensión de compresión admisible en el acero.

Como valor de  $\sigma_{sd,c}$  puede tomarse  $f_{yd}$  cuando se puedan establecer condiciones de compatibilidad de deformaciones con el hormigón de la biela que lo rodea, o bien limitarlo a 400 N/mm<sup>2</sup> cuando no se establezcan condiciones de compatibilidad explícitas.

*d) Bielas de hormigón confinado*

Atendiendo al diferente comportamiento del hormigón, según su estado de confinamiento, se puede plantear la posibilidad de aumentar la capacidad resistente de las bielas al confinar el hormigón que las compone.

El confinamiento de una biela de hormigón se logra por medio del atado de las barras de acero que delimitan geoméricamente la biela, a través de unos cercos transversales perfectamente anclados.

De esta forma la capacidad resistente del hormigón de la biela aumentará linealmente con la *solidez* del confinamiento, valor que se medirá en función de la relación entre la capacidad mecánica de la armadura transversal que lo forma y la capacidad mecánica del hormigón confinado, y de la separación de los cercos en función de la dimensión de la biela.

La formulación que recoge la EHE muestra el problema de un modo discreto, atendiendo a la necesidad normativa de simplificar. No obstante, la determinación de la capacidad última del hormigón a compresión en función del estado de tensión o deformación a que esté sometido en la dirección transversal a estas compresiones, es un campo de estudio en el que se sigue avanzando a través de la experimentación como forma de consolidar las teorías enunciadas hasta el momento.

En este punto destaca la teoría desarrollada por *Collins*, en la que, tras una campaña de ensayos en paneles con fisuración transversal impuesta, pudo plasmar una relación entre la resistencia última a compresión del hormigón y las deformaciones transversales de tracción.

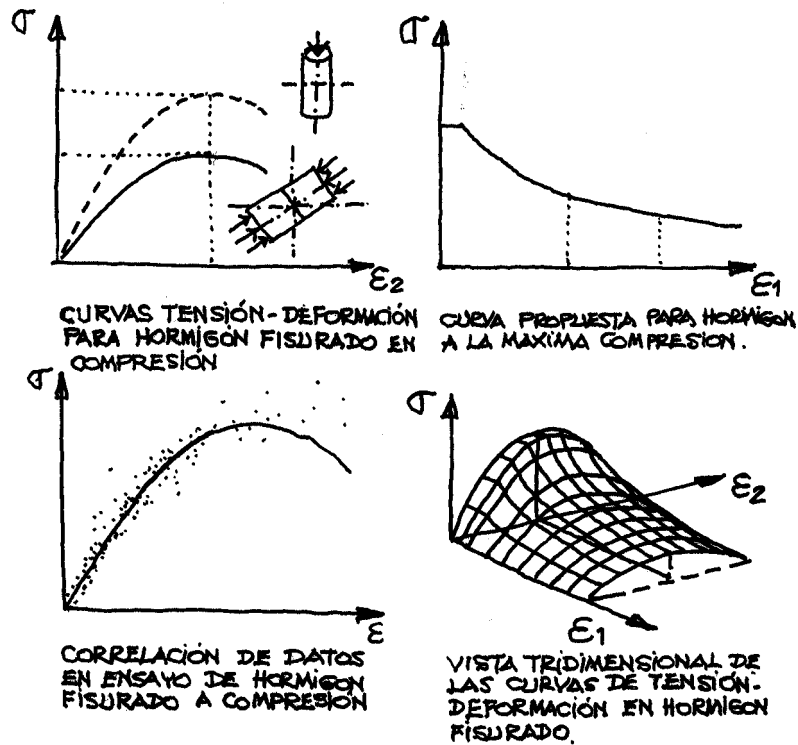


Figura 2.6.1.5. Relación tensión de compresión-deformación unitaria para hormigón fisurado

Otros autores como J. Schlaich proponen una formulación discreta.

## 2.6.2. Tirantes

Se denomina tirantes a los elementos resistentes del modelo que están sometidos a tracción. Este hecho condiciona que los tirantes se materialicen generalmente por medio de barras corrugadas o cables de acero, debido a la capacidad de este material para resistir tracciones dentro del cuerpo de una estructura de hormigón.

El acero presenta un comportamiento lineal tensión-deformación dentro de los márgenes habituales de trabajo. Además, se trata de un trabajo de deformación axial que no se ve influido por el estado tensional del material que rodea a las barras o los cables que constituyen el tirante. Por tanto, resulta más fácil acotar la capacidad de un tirante que en el caso de una biela; dicha capacidad depende únicamente del área de acero que compone el tirante y de la tensión a que está trabajando.

De esta forma, la capacidad de los tirantes se obtendrá como producto del área de acero dispuesta en la dirección del tirante por la capacidad resistente que se adopte para el acero.



Se pueden materializar tirantes tanto de armadura pasiva como de armadura activa, o de una suma de ambas.

En las armaduras pasivas, al tratarse de un análisis plástico en E.L.U., la forma de cumplir con el E.L.S. de fisuración y limitar la abertura de fisura consiste en reducir la tensión de trabajo del acero.

Así, para los esfuerzos de cálculo, se limita la tensión del acero en tirantes a  $f_{yd} \leq 400 \text{ N/mm}^2$ . Por tanto, la capacidad del tirante será

$$T_d = A_s \cdot f_{yd} \geq 400 A_s$$

siendo  $A_s$  el área de armadura pasiva que compone el tirante.

En cuanto a las armaduras activas, y debido a que la comprobación se hace en E.L.U., la tensión de trabajo del acero corresponderá a su tensión de cálculo, es decir a  $f_{pd}$ . En este caso, la capacidad del tirante vendrá definida por la expresión:

$$T_d = A_p \cdot f_{pd}$$

donde  $A_p$  es el área de armadura activa que forma parte del tirante.

Si se opta por tirantes compuestos por armadura activa y pasiva, la capacidad de los mismos será la suma de la aportada por los dos tipos de armadura:

$$T_d = A_s \cdot f_{yd} + A_p \cdot f_{pd}$$

### 2.6.3. Nudos

Los nudos son los elementos del modelo donde confluye una biela o tirante con otros tirantes o bielas.

Los nudos pueden clasificarse en aquellos en los que sólo confluyen bielas (nudos multicomprimidos) y aquellos en los que se anclan tirantes.

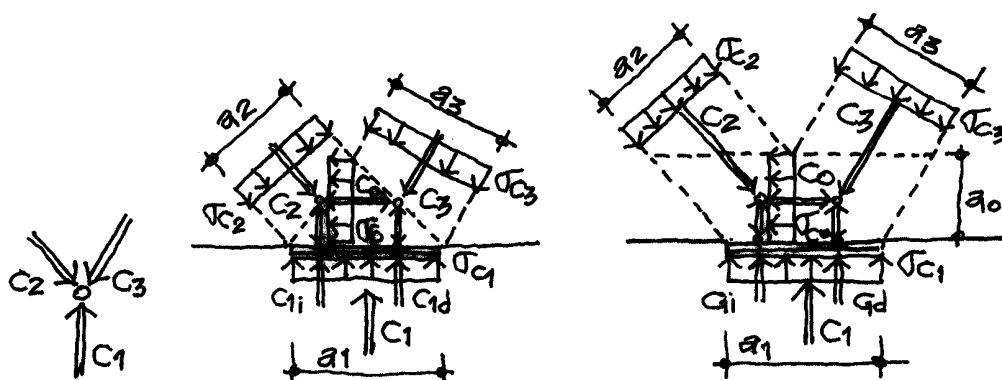


Figura 2.6.3.1. Nudos multicomprimidos

En el caso de nudos multicomprimidos (figura 2.6.3.1) la compresión máxima en el hormigón se limita a:

$$f_{2cd} = f_{cd}$$

en el caso de compresión biaxial, y a:

$$f_{2cd} = 3,3 f_{cd}$$

en el caso de compresión triaxial.

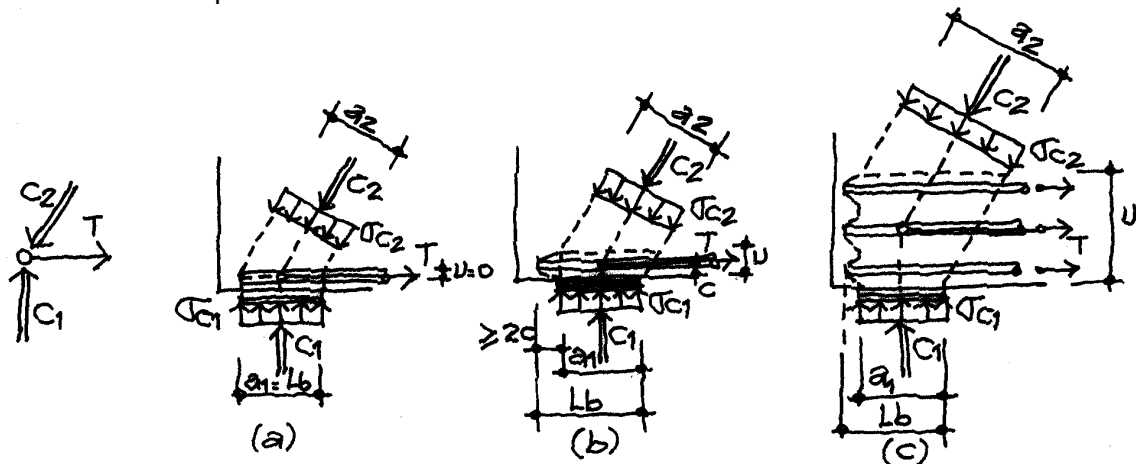


Figura 2.6.3.2. Nudos en los que se anclan tirantes

Cuando en el nudo se anclan tirantes (figura 2.6.3.2) la tensión de compresión máxima en el hormigón se limita a:

$$f_{2cd} = 0,70 f_{cd}$$

En este tipo de nudos hay que comprobar la longitud de anclaje  $l_b$  de la armadura del tirante, con los criterios indicados en la figura 2.6.3.2.

### 3. EL MÉTODO DE BIELAS Y TIRANTES EN LA NORMATIVA

#### 3.1. Instrucción de Hormigón Estructural EHE 1998

La EHE recoge por primera vez el MBT de forma explícita en la normativa española.

La citada norma incluye los siguientes aspectos:

- Definición de los principios en los que se basa el método, indicando la metodología a seguir para el dimensionamiento o la comprobación (Capítulo V, Análisis estructural).
- Establecimiento de una formulación para el diseño de aquellos elementos estructurales, o regiones D, en los que la definición de los mecanismos resistentes no está directamente recogida en la EHE (Capítulo IX, Características de los materiales para el proyecto).

- Resolución de elementos estructurales o regiones D, mediante modelos de bielas y tirantes (Capítulo XII, Elementos estructurales).

### 3.2. Código Modelo CEB-FIP 1990

El Código Modelo es la Normativa más completa que existe actualmente en el desarrollo del método de bielas y tirantes. Es la referencia del resto de Normas europeas.

- Resistencia de los tirantes
  - Hormigón armado:  $f_{yk}/\gamma_s$
  - Hormigón pretensado:  $0.9 f_{pkt}/\gamma_s - \sigma_{d0} \leq 600 \text{ N/mm}^2$
- Resistencia de las bielas

El valor límite de la capacidad del campo de compresiones (biela) depende de la simplificación que se adopte en la ley constitutiva del material. El Código Modelo propone dos opciones:

- Diagrama tensión-deformación parábola rectángulo
$$\begin{aligned}\sigma_{cd} &= 0.85 f_{cd} [2 (\varepsilon_c/\varepsilon_{cl}) - (\varepsilon_c/\varepsilon_{cl})^2] && \text{para } \varepsilon_c < \varepsilon_{cl} \\ \sigma_{cd} &= 0.85 f_{cd} && \text{para } \varepsilon_{cl} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu} \\ \sigma_{cd} &= 0.0 && \text{para } \varepsilon_{cu} < \varepsilon_c \\ \text{donde } \varepsilon_{cu} &= 0.002\end{aligned}$$
- Diagrama tensión-deformación rectangular
  - Zonas no fisuradas
  - $f_{cdl} = 0.85 [1 - f_{ck}/250] f_{cd}$
  - Zonas fisuradas
  - $f_{cdl} = 0.60 [1 - f_{ck}/250] f_{cd}$  (unidades en  $\text{N/mm}^2$ )

Además, se recomienda colocar armaduras transversales a la biela para absorber la tracción transversal debida al efecto Poisson. La cuantía de esta armadura será tal que soporte una tracción igual al 25% de la fuerza total de la biela.

Por otra parte el Código Modelo desarrolla, empleando el método de bielas y tirantes, los ejemplos más representativos de regiones de discontinuidad, zonas de estructuras próximas a la aplicación de fuerza, vigas de gran canto, etc. También emplea el modelo de la celosía para explicar el mecanismo del esfuerzo cortante.

### 3.3. Eurocódigo 2

La versión (ENV-EC2) incluye de forma explícita el MBT. Sin embargo, no se enuncian los fundamentos del método de forma concreta, ni se indica su forma de aplicación explícitamente.

Además, tampoco se incluye una formulación que permita la comprobación de nudos.

### **3.4. Société Suisse des Ingénieurs et des Architectes (SIA)**

En la normativa suiza no se trata de forma explícita el método de bielas y tirantes. Se emplea una celosía para explicar el mecanismo resistente del esfuerzo rasante.

### **3.5. ACI (American Concrete Institute)**

En la norma ACI de 1998 no aparece reflejado el método de bielas y tirantes como procedimiento general de cálculo. La única mención a este sistema se da en el apartado 11.9. "Consideraciones especiales en ménsulas cortas", en el cual la resolución propuesta se basa en un modelo de bielas y tirantes.

### **3.6. Normenausschuss Bauwesen im DIN (Deutsches Institut für Normung).**

En la DIN 1045 de 1978 no existían referencias concretas al método de bielas y tirantes, aunque había una serie de elementos estructurales que se resolvían empleando, indirectamente, este procedimiento: ménsula corta, anclaje de pretensado. Además, se empleaba la analogía de la celosía para resolver el esfuerzo cortante.

Sin embargo, en la versión de 1998 aparece un apartado llamado "Dimensionamiento mediante modelos de celosía", donde se exponen las reglas del método general de Bielas y Tirantes. Se dan valores de la resistencia de los tirantes y de los nudos, mientras que las bielas se tratan de un modo más general sin entrar en la resistencia de estos elementos.

- Resistencia de los tirantes.  
Hormigón armado:  $f_{yd}$   
Hormigón pretensado:  $0.9 f_{pk} / \gamma_s$
- Resistencia de los nudos  
Se distinguen dos casos:
  - Nudo al que sólo llegan bielas:  $\sigma_{Rd,max} = 1.1 f_{cd}$   
Para nudos con compresión triaxial, la resistencia del nudo depende del hormigón:

$\sigma_{Rd,max} = 1.1 f_{cd}$	hasta C 50/60
$\sigma_{Rd,max} = 1.0 f_{cd}$	desde C 55/67
  - Nudo donde se anclan tirantes:  $\sigma_{Rd,max} = 0.8 f_{cd}$

Este valor sólo es válido cuando los ángulos existentes entre bielas y tirantes son inferiores a 45°.

Por otra parte se admiten valores de hasta  $1.0 f_{cd}$  en casos de "modelización especialmente buena" y "experiencia constructiva"

### **3.7. AASHTO - 1999**

La norma AASHTO-1999 (American Association of Highways Transport Offices) recoge de forma prácticamente completa el MBT. Así, se indican los principios generales, se definen las capacidades resistentes de bielas, tirantes y nudos, y se recoge la aplicación de método a diversos elementos estructurales.

### **3.8. RESUMEN**

En la figura 3 se ofrece una tabla que resume la situación de forma comparada.

	EHE-1998	CODIGO MODELO 1990	EUROCÓDIGO 2	SIA	ACI-1998	DIN	AASHTO 1999
TRATAMIENTO GENERAL DEL MÉTODO	SI	SI	SÍ	NO	NO	SI	SI
CAPACIDAD RESISTENTE DE LOS TIRANTES	$\sigma_{sd} < 400 \text{ N/mm}^2$ Limitación de deformación al 2 %	$f_{yk} / \gamma_s$	$f_{yd}$	-	-	$f_{yd}$ hormigón armado $0.9 f_{pk} / \gamma_s$ hormigón pretensado	$f_y$ acero pasivo $f_{pe} + f_y$ acero activo
CAPACIDAD RESISTENTE DE LAS BIELAS	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Compresión uniaxial</li> <li>• Fisuración paralela a las bielas</li> <li>• Bielas con armadura comprimida</li> <li>• Bielas de hormigón confinado</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Bielas de hormigón comprimido</li> <li>• Bielas de hormigón confinado</li> <li>• Bielas con acero comprimido</li> </ul>	$v f_{cd}$  valor medio $v = 0,6$	-	-	-	Bielas: <ul style="list-style-type: none"> <li>• flex. y trac horm. armad. 0.9</li> <li>• flex. y trac horm. prete. 1.0</li> </ul> Bielas armadas: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Compresión uniaxial <math>0.85 \times 0.7 f_c</math></li> <li>• Nudos que anclan tirantes <math>0.75 \times 0.75 f_c</math></li> <li>• Nudos que anclan + tirante <math>0.65 \times 0.7 f_c</math></li> </ul>
CAPACIDAD RESISTENTE DE LOS NUDOS	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Compresión uniaxial <math>f_{1cd} = f_{cd}</math></li> <li>• Compresión biaxial <math>f_{1cd} = f_{cd}</math></li> <li>• Compresión triaxial <math>f_{1cd} = 3,3 f_{cd}</math></li> <li>• Nudos con tirantes <math>f_{2cd} = 0,7 f_{cd}</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Nudos comprimidos</li> <li>• Nudos con compresiones y tracciones</li> </ul>	$v f_{cd}$  compresión triaxial $v < 3,3$	-	-	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Compresión uniaxial <math>\sigma_{Rd,max} = 1.1 f_{cd}</math></li> <li>• Nudos donde se anclan tirantes <math>\sigma_{Rd,max} = 0.8 f_{cd}</math> (con ángulos inferiores de <math>45^\circ</math>)</li> </ul>	
EJEMPLOS DESARROLLADOS	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Ménsula corta</li> <li>• Celosía de cortante</li> <li>• Cargas en macizos</li> <li>• Vigas de gran canto</li> <li>• Cimentaciones rígidas</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Ménsula corta</li> <li>• Vigas de gran canto</li> <li>• Esquinas de pórticos</li> <li>• Zonas con aplicación de carga puntual.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Ménsula corta</li> <li>• Viga de gran canto</li> <li>• Zona sometida a cargas concentradas</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Mecanismo de cortante</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Ménsula corta</li> <li>• Mecanismo de cortante</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Celosía de cortante</li> <li>• Ménsula corta</li> <li>• Anclaje de pretensado</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Diafragmas</li> <li>• Vigas de gran canto</li> <li>• Ménsulas cortas</li> <li>• Anclaje del pretensado</li> </ul>
ARTICULADO	24. Regiones D 40. Capacidad bielas, tirantes y nudos. 59. Cimentación 60. Cargas concentradas. 62. Vigas gran canto 63. Ménsulas	6.8. Vigas de gran canto y regiones de discontinuidad. 6.9. Comprobación de nudos y anclajes	Art. 2.5.3.6.3. Análisis Plástico	SIA 162 1989 3.24.2. Esfuerzo cortante.	318 / 318R-162 11.9. Special provisions for brackets and corbels	Borrador DIN 1998 10.6. Dimensionamiento mediante modelos de celosía.	5.6.3. Modelo de bielas y tirantes 5.10.9 Zonas de anclajes de postesado 5.13.2. Diafragmas, vigas de gran canto, ménsulas cortas.

Figura 3. El método de bielas y tirantes en la normativa

## 4. CRITERIOS DE PROYECTO

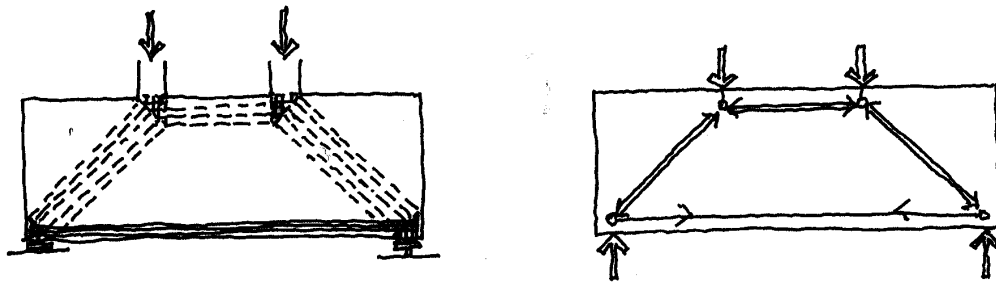
### 4.1. Introducción.

Dentro de este apartado se incluyen unas recomendaciones para el trazado de los mecanismos resistentes de bielas y tirantes, que permiten seleccionar el más adecuado dentro del abanico de los posibles. Además, se describen las formas de definir las dimensiones geométricas de nudos y bielas que permiten establecer, por una parte, las dimensiones globales de los mecanismos resistentes y, por otra, las áreas de los elementos en los que se han de comprobar las tensiones.

Por último, se recogen los pasos a seguir para una correcta aplicación del método.

### 4.2. Criterios de elección de mecanismos resistentes

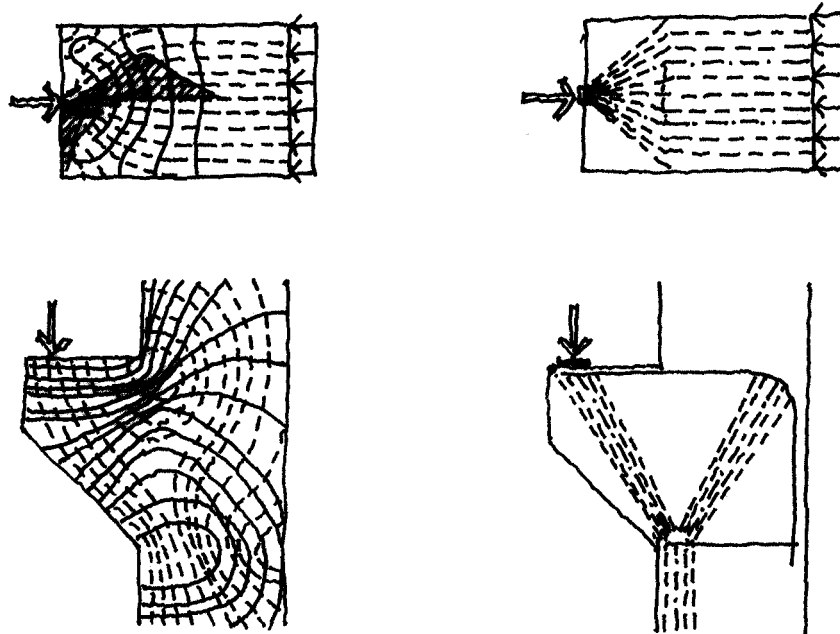
El método de bielas y tirantes permite el análisis de la estructura, o de parte de ésta, reduciendo los estados de tensiones tridimensionales existentes a estados unidireccionales de compresión o tracción; para ello se utilizan las resultantes de los campos de compresiones (bielas) y las fuerzas de tracción desarrolladas por la armadura (tirantes).



*Figura 4.2.0.1. Flujo de fuerzas, mecanismo resistente equivalente, celosía.*

Estos sistemas resistentes, que representan el flujo de fuerzas dentro de la estructura, pueden simplificarse como una celosía o estructura articulada, de dos o tres dimensiones (figura 4.2.0.1) que representa las resultantes de compresiones (bielas) y las tracciones en la armadura (tirantes).

El primer problema que se plantea al utilizar el método de bielas y tirantes es seleccionar un sistema resistente que represente lo mejor posible el flujo de fuerzas dentro de la estructura. Una primera aproximación consiste en trazar las direcciones de las bielas y las armaduras (tirantes), adaptándose en lo posible a las trayectorias de tensiones obtenidas con un análisis elástico; así se evitará en lo posible la plastificación de la armadura y una fisuración no controlada en el hormigón.



*Figura 4.2.0.2. Criterio de elección de celosías. Orientación según las tensiones principales en régimen elástico*

No obstante, debido a cuestiones constructivas, tal y como puede observarse en la figura 4.2.0.2, las armaduras no podrán en general orientarse según las tensiones principales de tracción y, por ello, será necesario disponer una cuantía mínima para asegurar el control de la fisuración en servicio.

En cualquier caso y como se ha comentado anteriormente en el apartado 2.5.2, siempre que se pretenda diseñar una región D no incluida en los casos mas habituales, presentes en la normativa o en la bibliografía especializada, es aconsejable el estudio mediante el método de los elementos finitos en régimen elástico para conocer el comportamiento en servicio de la región D.

#### **4.2.1. Sistemas resistentes isostáticos e hiperestáticos**

En principio, existen varias celosías equivalentes resistentes para resolver un problema dado. De entre todos los modelos posibles deben evitarse los sistemas hiperestáticos, es decir, no deben utilizarse aquellos modelos que requieran asignar una rigidez a los elementos que constituyen las barras del modelo, para obtener las reacciones o los esfuerzos en las barras del sistema equivalente. En el caso en que el elemento a estudiar sea externamente hiperestático (por ejemplo, en el caso de una viga continua de gran canto), o en el caso en que exista un hiperestatismo a nivel local (carga interna en un macizo), el sistema hiperestático resultante se descompondrá en suma de dos o más modelos isostáticos, de forma que para calcularlos baste con las condiciones de equilibrio.



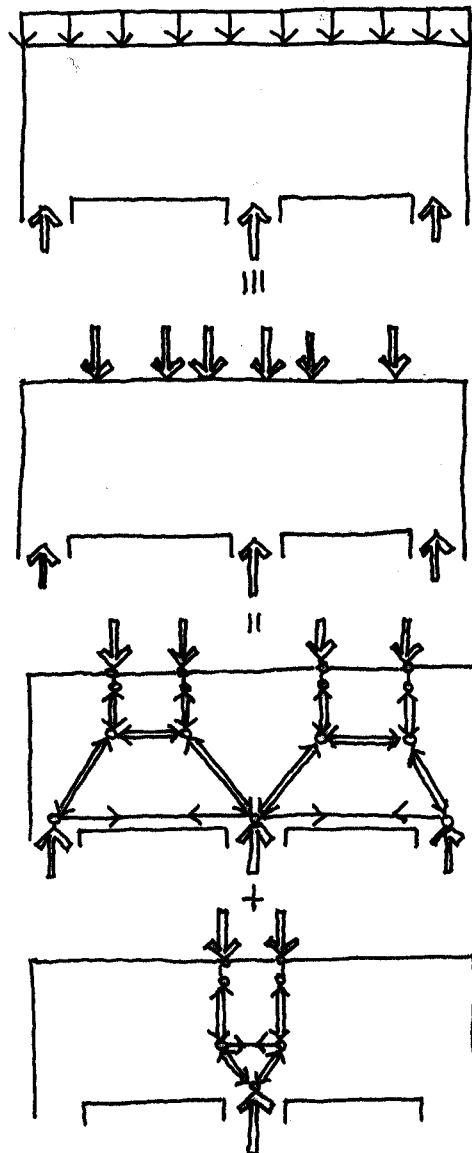


Figura 4.2.1.1. Criterio de elección de celosías. Forma de resolver sistema hiperestáticos

#### 4.2.2. Sistemas con longitud mínima de tirantes

Entre dos mecanismos posibles será aconsejable utilizar aquel de menor energía de deformación (apartado 2.5.2.) lo que se traduce en que el trabajo a tracción sea mínimo, ya que cualquier estructura tiende a soportar las cargas con la mínima deformación posible. Por ello y como los tirantes son mucho más deformables que las bielas, el primer modelo resistente será aquel en que la suma de los productos de las tracciones por la longitud de los tirantes del conjunto del mecanismo sea mínimo, es decir, aquél que se deforme menos.

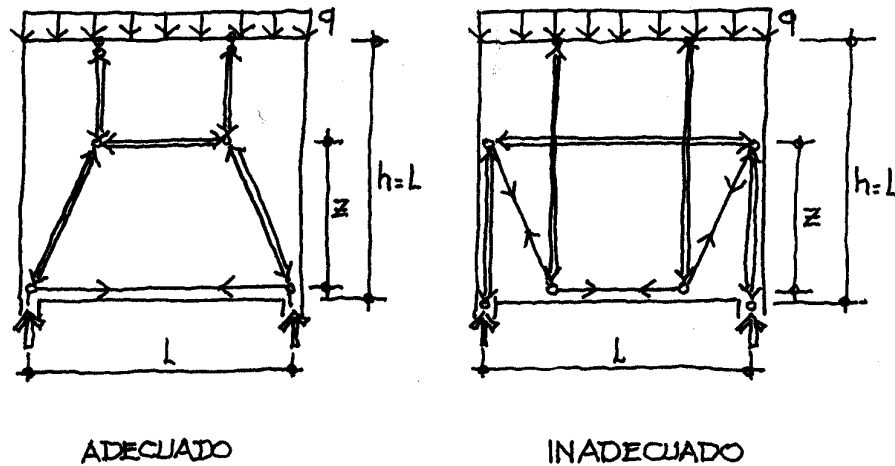


Figura 4.2.2.1. Criterio de elección de celosías. Sistemas con longitud de tirantes mínima

#### 4.2.3. Trazado de bielas: ángulos de dispersión, ángulos mínimos entre elementos del modelo

Además de estos principios generales, hay que indicar los siguientes aspectos que permiten orientar el trazado de las bielas y tirantes.

En la difusión de cargas puntuales (figura 4.2.3.1), los ángulos posibles de desviación ( $\alpha$ ) varían entre  $30^\circ$  y  $45^\circ$ .

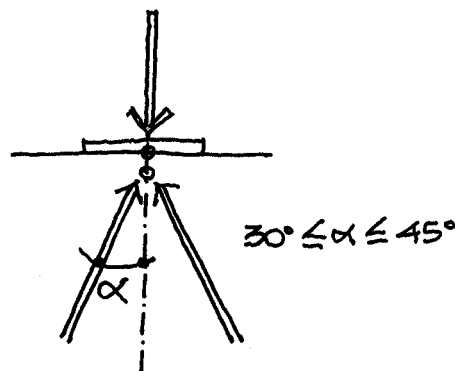


Figura 4.2.3.1. Ángulos posibles de desviación de cargas puntuales

El valor  $30^\circ$  representa una difusión clásica en un medio elástico (sin fisuración), mientras que el valor  $45^\circ$  corresponde a una situación de carga más avanzada (fisuración en el hormigón).

En el caso en que se produzca una desviación en la dirección de una biela ligada a la presencia de un tirante (figura 4.2.3.2.), el ángulo de desviación mínimo  $\alpha$  será de  $22^\circ$ .

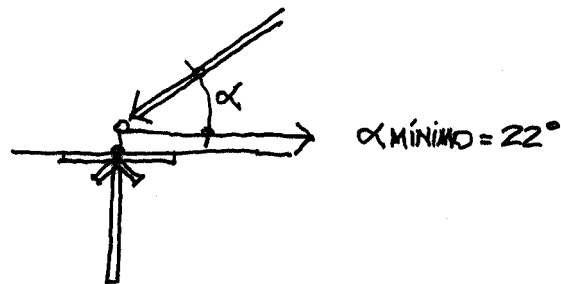


Figura 4.2.3.2. Ángulo de desviación biela-tirante

Estas indicaciones han de interpretarse como unos criterios de carácter general que pueden orientar al técnico, aunque siempre es posible (y recomendable) acudir a un análisis de tipo elástico para comprobar la idoneidad del sistema resistente propuesto.

#### 4.3. Criterios para la definición de nudos

Se definen como nudos aquellas zonas en las que se producen desviaciones en los campos de compresión (bielas) o en los tirantes de armadura. En estos elementos suelen confluir bielas, tirantes o combinaciones de éstos, unidos a la presencia de reacciones o cargas exteriores.

En general, pueden clasificarse los nudos, en función del tipo de elementos que acceden a ellos, en nudos multicomprimidos y nudos en los que se anclan tirantes (figuras 4.3.1).

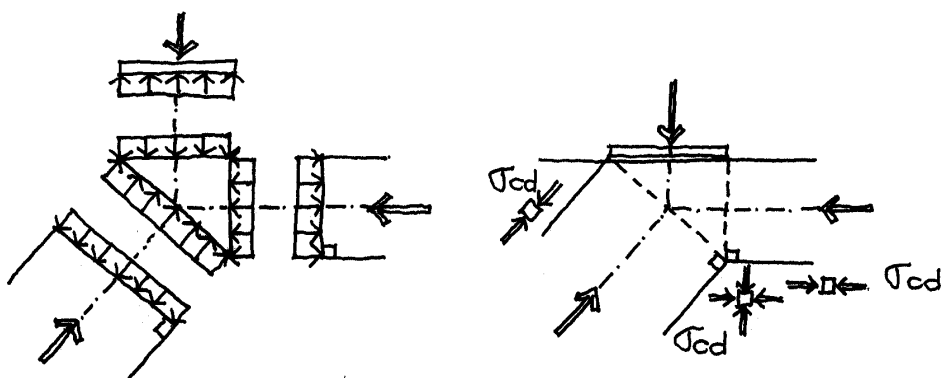


Figura 4.3.1.a) Nudos multicomprimido.

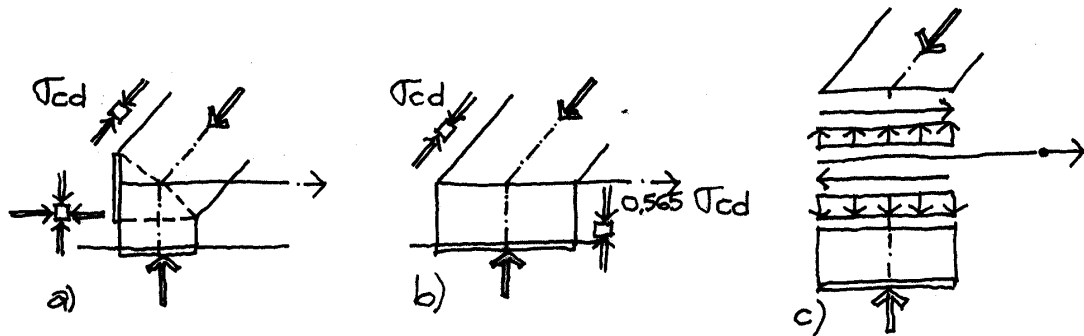


Figura 4.3.1.b. Nudo donde se anclan tirantes

Las dimensiones del nudo están condicionadas por la geometría de los elementos que confluyen en él. En el caso de apoyos o cargas aplicadas, las dimensiones básicas del nudo están definidas por la geometría de los apoyos o por la geometría de la carga aplicada (figura 4.3.2).

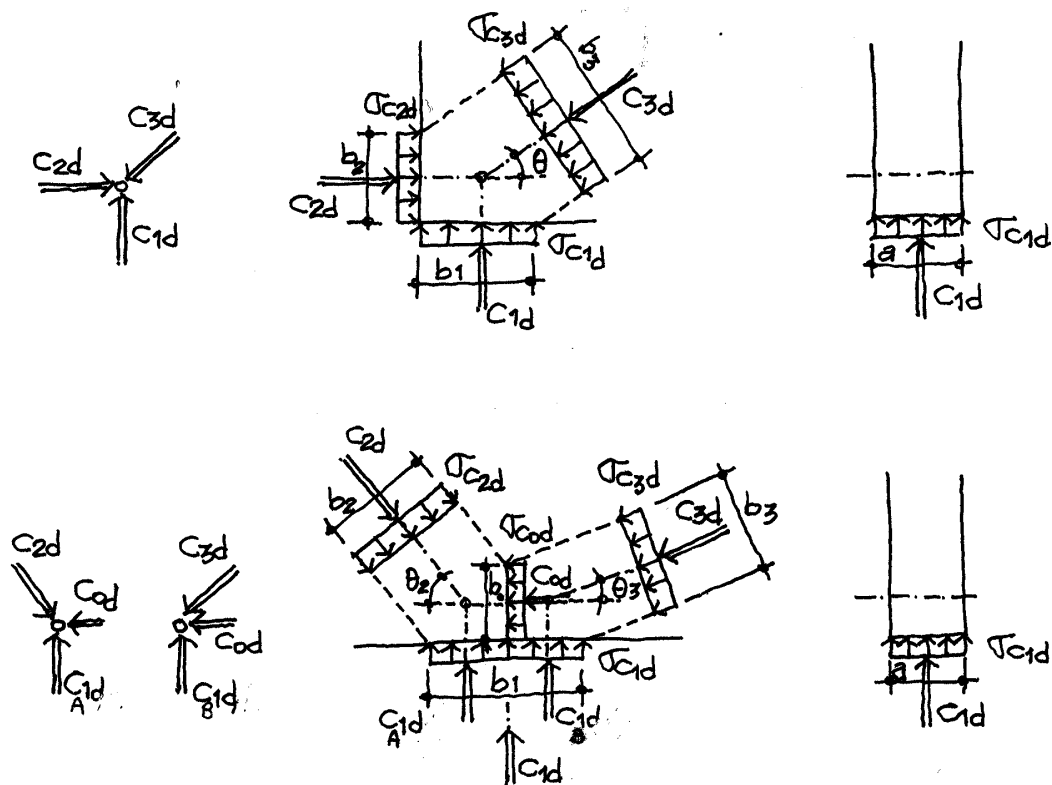


Figura 4.3.2. Nudo multicomprimido, en dos direcciones condicionado por la geometría de un apoyo

En aquellos nudos donde se anclan tirantes, sus dimensiones están condicionadas por el recubrimiento de la armadura y la dimensión de la carga aplicada (figura 4.3.3).

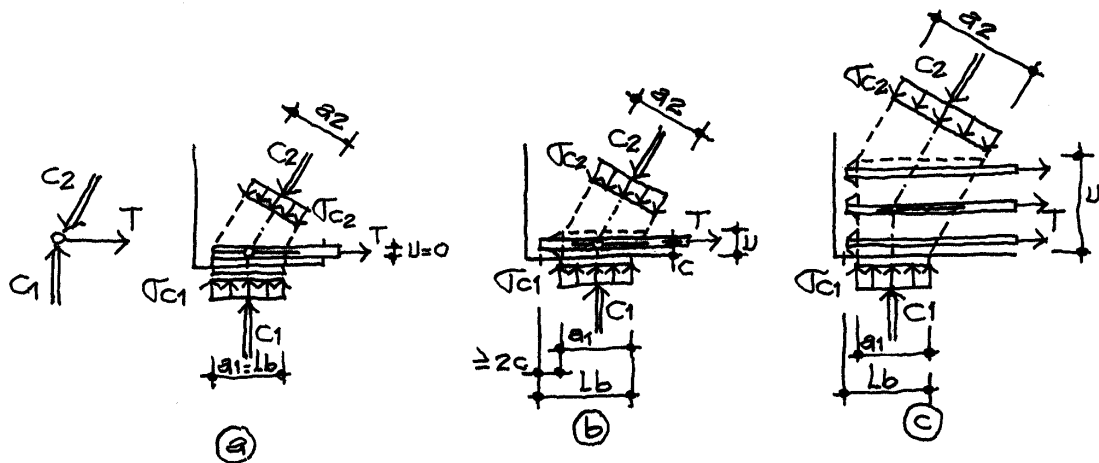


Figura 4.3.3. Nudos donde se anclan armaduras, condicionado por la geometría de un apoyo y la disposición de armadura del tirante que se ancla en él

En estos casos, la dimensión vertical del nudo es de dos veces el recubrimiento mecánico de la armadura (en la figura  $u/2$ ), entendiéndose por tal la distancia entre el centro de gravedad de la armadura del tirante y el límite del hormigón.

En la figura 4.3.3. se indica también el punto desde donde se mide la longitud de anclaje " $l_b$ ".

En la figura 4.3.4., se indica la forma de definir las dimensiones del nudo para poder efectuar las comprobaciones correspondientes, en tres casos concretos.

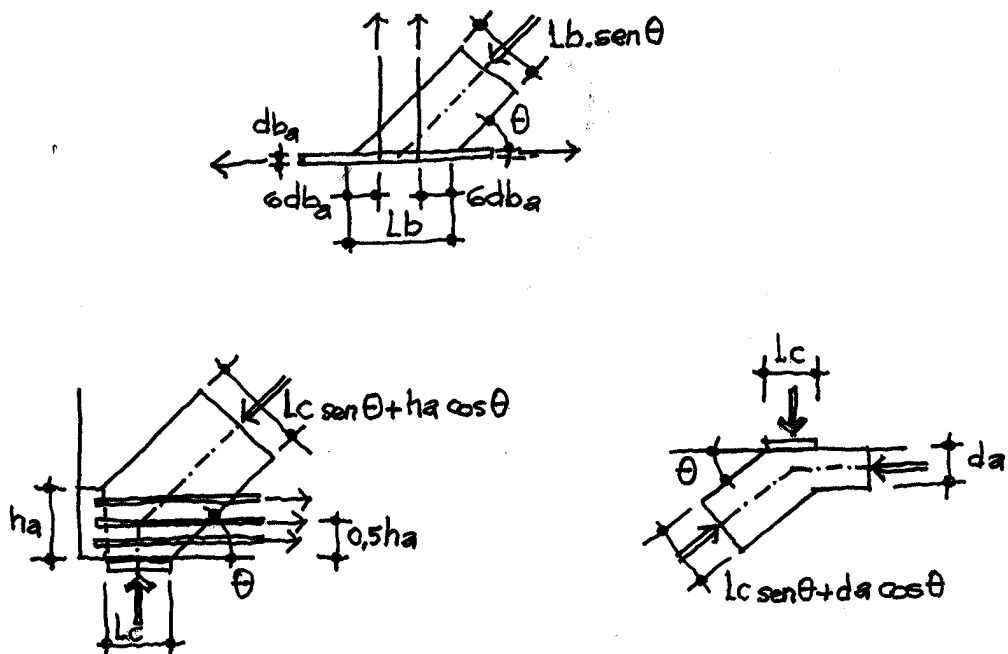


Figura 4.3.4. Criterio para la definición de las dimensiones de algunos nudos frecuentemente utilizados en la práctica

#### 4.4. Procedimiento para la aplicación del método

La primera fase en la aplicación del método consiste en el planteamiento del mecanismo resistente (celosía equivalente) y la comprobación de las condiciones de equilibrio del mismo.

Al plantear las condiciones de equilibrio, hay que distinguir el caso en que se esté calculando una estructura completa o bien una porción de la misma.

En el caso en que se esté estudiando una estructura completa (figura 4.4.1) las condiciones de equilibrio se establecen entre las cargas exteriores y las reacciones.

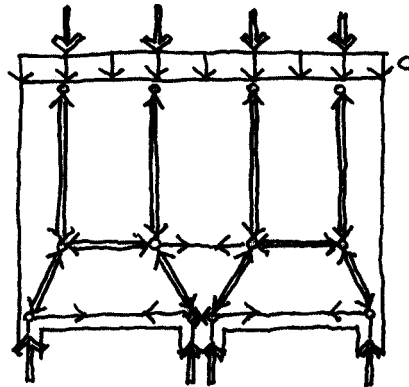


Figura 4.4.1. Planteamiento de las condiciones de equilibrio en una estructura completa

Por el contrario, si lo que se está analizando es una parte de la estructura (figura 4.4.2) las comprobaciones de equilibrio deben establecerse entre las cargas exteriores aplicadas en la porción de elemento analizado, las reacciones en esa parte de la estructura, y los esfuerzos en la frontera del elemento analizado.

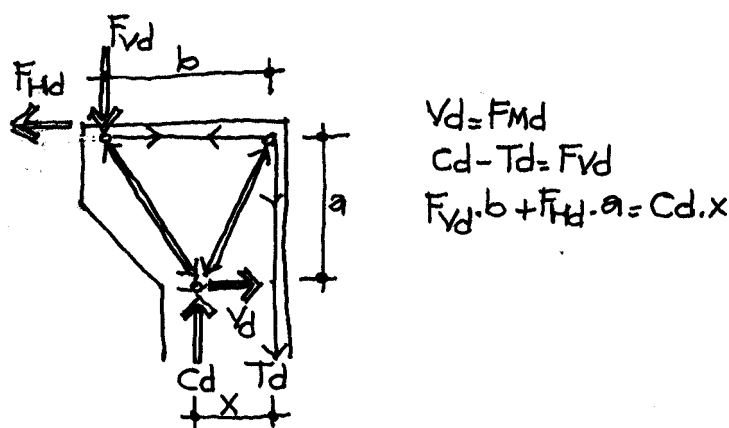


Figura 4.4.2. Planteamiento de las condiciones de equilibrio en una parte de estructura.

Es importante indicar que estas dos acciones, selección de celosía resistente y comprobación de las condiciones de equilibrio, son los dos aspectos fundamentales en la aplicación del método.

Una concepción errónea del mecanismo resistente o la utilización de un sistema en el que no se cumplan las condiciones de equilibrio, pueden comprometer la seguridad estructural.

Una vez definido el mecanismo resistente, es necesario hacer algunas consideraciones sobre el tamaño de los elementos que lo componen. Por ejemplo, en el caso de los nudos, su geometría estará condicionada por las dimensiones de la carga aplicada, o el tamaño del apoyo de la estructura, o el ancho de las bielas, o la posición de las armaduras que acometen al mismo. Esto supone definir una geometría de la celosía resistente sobre la que se van a calcular los esfuerzos.

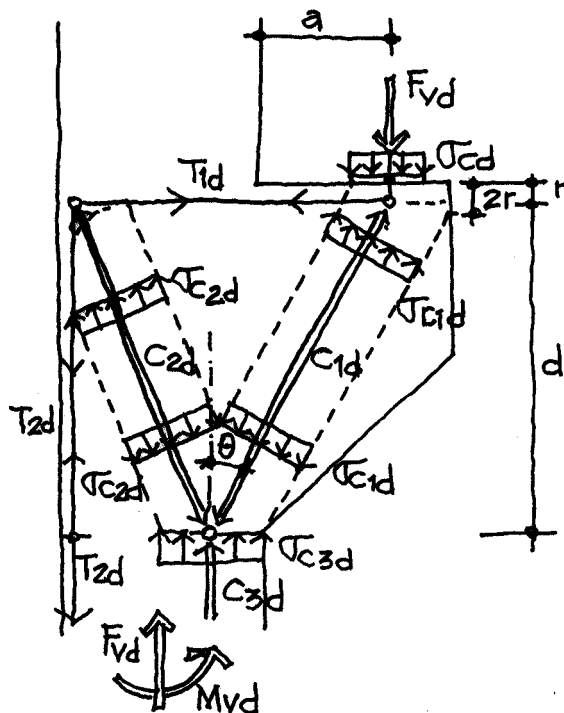


Figura 4.4.3. Geometría de una celosía equivalente para explicar el comportamiento de una ménsula corta

A partir de este punto, y una vez entendido y trazado el flujo de fuerzas entre cargas exteriores, reacciones y en su caso esfuerzos en la zona de frontera, es posible realizar un cálculo de las fuerzas axiales existentes en los diversos elementos que componen la celosía resistente. Este cálculo debe ser posible tan sólo a partir de las condiciones de equilibrio, evitando el empleo de sistemas hiperestáticos.

En el caso en que el sistema global deba ser hiperestático (por la configuración de la estructura), conviene simplificarlo como suma de dos o más sistemas isostáticos, de forma que no haya que tener en cuenta la rigidez de las bielas o de los tirantes para la obtención de los esfuerzos o reacciones del sistema. Hay que evitar este aspecto ya que no resulta fácil establecer cuál es la rigidez real de las bielas (ya que éstas representan tan sólo las resultantes de los campos de compresiones), y menos aún la de los tirantes, ya que cualquier estimación de la rigidez de los mismos debe tener en cuenta el efecto de rigidización entre fisuras ("tension-stiffening") del hormigón circundante. Por ello, los resultados en términos de esfuerzos y reacciones, calculados en un modelo hiperestático en

el que la rigidez de las bielas sea la obtenida a partir de las dimensiones consideradas para éstas, y en el que la rigidez de los tirantes sea la correspondiente a la armadura, se separarán en gran medida de los valores de reacciones y esfuerzos en servicio de la estructura.

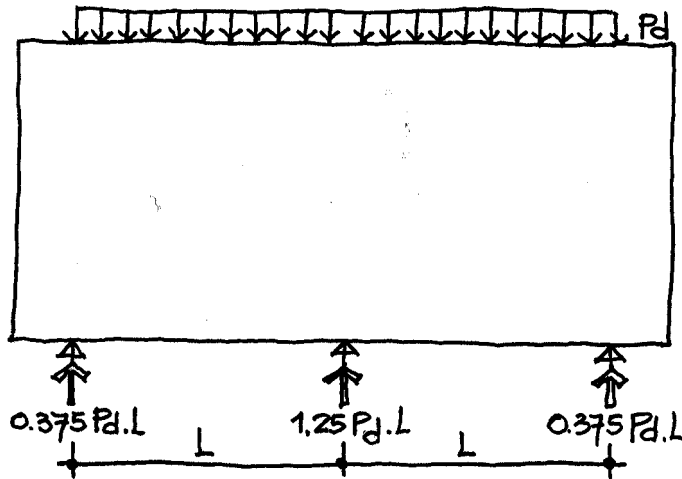


Figura 4.4.4. Viga de gran canto de dos vanos: Obtención de las reacciones en un sistema hiperestático

Por ello, en el caso en que la estructura en estudio sea hiperestática, las reacciones se pueden obtener a partir de un cálculo elástico y lineal, descomponiéndose después los posibles sistemas hiperestáticos de bielas y tirantes, en suma de varios sistemas isostáticos (ver figura 4.2.1.1).

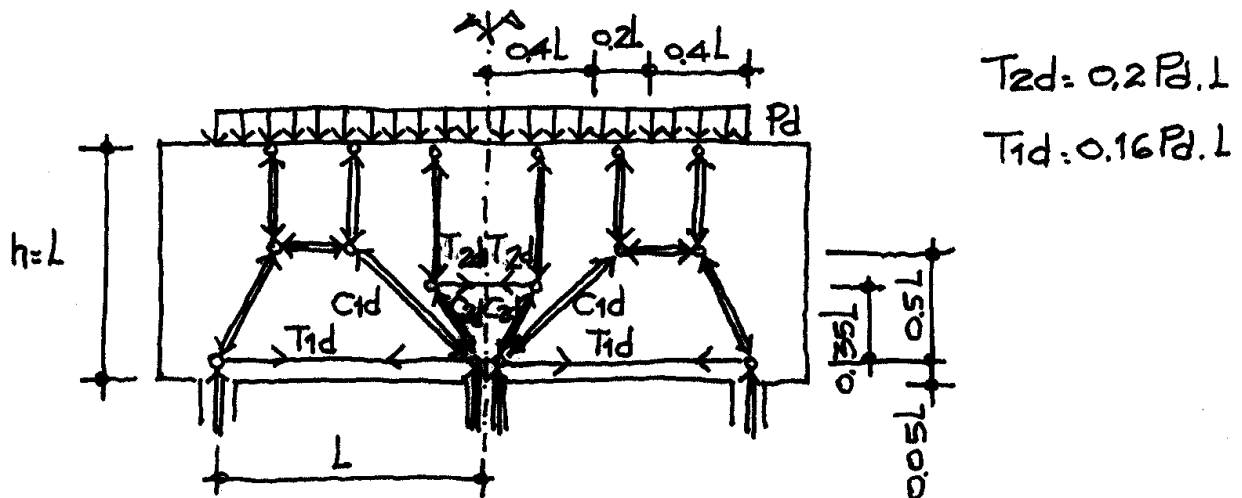


Figura 4.4.5. Viga de gran canto de dos vanos: Sistema hiperestático resuelto por superposición de sistemas isostáticos

Una vez obtenidos los esfuerzos en las distintas barras del modelo, hay que comprobar los distintos elementos resistentes que componen el mecanismo previsto: bielas, tirantes y nudos.



Si alguno de estos elementos no tuviese la capacidad resistente necesaria (con los criterios indicados en los apartados siguientes), será necesario modificar la geometría y volver a reproducir los pasos anteriores, según se indica en el diagrama de la figura 4.4.6.

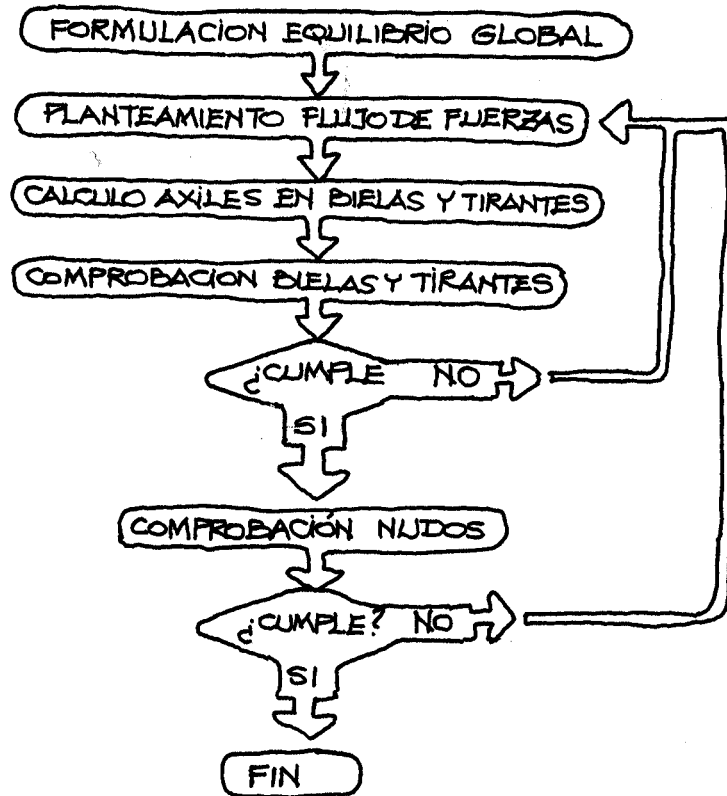
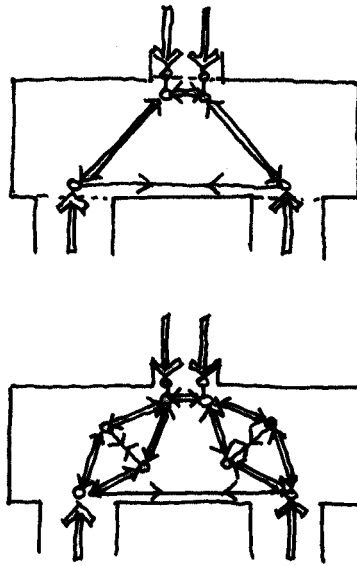


Figura 4.4.6. Diagrama de flujo

#### 4.5. Sistemas principales y sistemas secundarios

En algunos casos, además del sistema resistente principal, existen otros sistemas secundarios que pueden proceder, por ejemplo, de una dispersión del campo de compresiones entre dos nudos, lo que supone la existencia de fuerzas de desviación y, consecuentemente, unas tracciones secundarias (figura 4.5.1).



*Figura 4.5.1. Mecanismo simple y mecanismo con aparición de tracciones secundarias*

En muchos casos, en la normativa se tiene en cuenta la presencia de tracciones secundarias en el diseño, mediante la colocación de una armadura secundaria o mínima capaz de cubrir razonablemente estas tracciones.

## 5. BIBLIOGRAFÍA

Código Modelo CEB-FIP 1990 para hormigón estructural.

Instrucción de hormigón en masa o armado. Madrid, 1968.

Instrucción de hormigón en masa o armado EH-90. Madrid, 1980.

Instrucción de hormigón estructural EHE. Ministerio de Fomento. Madrid, 1998.

Adebar, P. et al.: Strut-and-Tie Models for the design of File Caps: An Experimental Study. ACI Structural Journal. N°1, 1990.

Adebar, P., Shou, Z.: Design of Deep Pile Caps by Strut-and-Tie Models. ACI Structural Journal. N°4, 1996.

Adebar, P., Zhou, Z.: Bearing Stregth of Compressive Struts Confined by Plain Concrete. ACI Structural Journal. N°5, 1993

Aparicio, Angel C, et alter. Investigación sobre la compresión máxima en bielas por esfuerzo cortante en piezas prefabricadas de hormigón pretensado con armaduras pretesas. Hormigón y Acero – 3er trimestre 1998

Berner, D.E., Hoff, G.C.: Headed Reinforcement in the Disturbed Strain Regions of Concrete Members. Concrete International, 1992

Calavera, J.: Cálculo de estructuras de cimentación. INTEMAC. Madrid, 2000.

Calavera, J.: Proyecto y cálculo de estructuras de hormigón. Tomos I y II. INTEMAC. Madrid, 1.999

Collins, M.P. et Mitchell, D.: Prestressed Concrete Structures. Prentice Hall. New Jersey, 1991

Foster, S.J., Gilbert, R.I.: The desing of nonflexural members with normal an high-strength concretes. ACI Structural Journal. N°1, 1996.

Franz G.; Niedenhoff H. "The Reinforcement of Brackets and Short Deep Beams" Cement and Concrete Association N° 114 Londres 1963

Leonhardt F. "Das Bewehren von Sathlbetontragwerken" Beton-Kalender 1971

Littel, A.L.: Cimentaciones. Compañía Editorial Continental, S.A. México D.F., 1965

Mörsch E. "Der Eisenbeton.Seine Theorie und Auwendung" Wittwer Sttutgart. 1908

Muttoni, A., Schwartz, J., Thürlimann, B.: Design of Concrete Structures with Stress Fields. Birkhäuser. Basel; Boston; Berlin, 1996

Pötzl, M.: Pile Cap Subjected to Vertical Forces and Moments. IABSE Workshop. New Delhi, 1993

Ritter W. "Die Bauweise hennebique" Schweizerische Bauzeiturg 17, 1899

Romo, J., Schlaich, M., Corres, H.: Análisis de Grandes Elementos de Hormigón Armado. Aplicación Práctica del Método de Bielas y Tirantes. Hormigón y Acero n° 195, 1995.

Schlaich, J., Schäfer, K.: Desing and Detailing using Strut-and-Tie Models. IABSE Workshop. New Delhi, 1993

Schlaich, J.: Finite Element Method Versus Strut-and-Tie Models.. IABSE Workshop. New Delhi, 1993

Schlaich, J.: Conceptual Treatment of Prestress in the Concept of Structural Concrete. IABSE Workshop. New Delhi, 1993

Siao, W.B: Strut-and-Tie Model for Shear Behavior in Deep Beams and Pile Caps Failing in Diagonal Splitting. ACI Structural Journal. N°4, 1993.

Thürlimann B. "Torsion, Biegung und Chub in Stahlbetonträgern ETH Zürich 1975

Zienkiewick, O.C.: El método de los elementos finitos. Reverté. Barcelona, 1982

## **PARTE II. PRÁCTICA**

## **INTRODUCCIÓN**

La parte práctica de la presente monografía se ha dividido en dos capítulos:

En el *capítulo 1: Colección de modelos*, se incluyen algunos elementos estructurales frecuentes en la práctica, cuyo comportamiento puede ser representado mediante un sistema resistente formado por bielas y tirantes. En esta colección se incluye la representación gráfica de posibles MBT.

En el *capítulo 2: Ejemplos de aplicación*, se desarrollan ejemplos completos en tres áreas: Elementos de cimentación (zapatas y encepados), elementos de edificación y ejemplos de zonas de puentes, todos ellos proyectados y armados utilizando el método de las bielas y los tirantes.

## **CAPÍTULO I. COLECCIÓN DE MODELOS**

## CAPÍTULO I. COLECCIÓN DE MODELOS

Se incluyen en este apartado una serie de modelos de bielas y tirantes que cumplen las condiciones indicadas en la parte teórica: isostaticidad, longitud mínima de tirantes, etc. que permiten explicar el comportamiento de diversos elementos estructurales. Hay que indicar que pueden existir soluciones alternativas, aunque se ha preferido definir una sola solución por elemento estructural y situación de cargas. También es conveniente advertir al lector que el sistema resistente está vinculando a la configuración de cargas actuantes. Así, en algunos ejemplos se han incluido distintos modelos en función de las solicitaciones.

La colección de modelos se ha dividido en varios grupos:

Cimentaciones  
Pretensado y apoyos  
Edificación  
Puentes

### 1. CIMENTACIONES

Las cimentaciones, por su masividad, suelen ser elementos estructurales susceptibles de ser diseñados utilizando el MBT.

El MBT es de aplicación directa en el caso de encepados y zapatas de tipo rígido, es decir cuando el vuelo sea inferior a dos veces el canto útil del elemento.

#### 1.1. Zapatas rígidas

Dentro de las zapatas rígidas se pueden diferenciar dos tipos fundamentales: las zapatas corridas y las zapatas aisladas.

Las zapatas corridas son zapatas con un claro comportamiento bidimensional. Pueden ser ejemplos de zapatas corridas, las zapatas de un muro de contención ó de un estribo de un puente, y la cimentación de una pila apantallada o de una pantalla contraviento en un edificio alto.

Las zapatas aisladas tienen por el contrario un comportamiento tridimensional. Un ejemplo de este tipo de zapatas puede ser el caso de la cimentación de un pilar de edificación o de una pila de puente. En los ***ejemplos de aplicación EC 1 y EC 2*** del capítulo siguiente se muestran ejemplos de este tipo de zapatas.

##### Zapata de pantalla o pila apantallada

Este tipo de zapatas se caracteriza por tener un comportamiento plano (bidimensional).

En los ejemplos de las figuras CM 1.1.1 a CM 1.1.4, se indican posibles sistemas de bielas y tirantes, para el caso de la cimentación de una pantalla o una pila de hormigón, en función de la excentricidad de la carga.

En el caso de la figura CM 1.1.1 la pantalla transmite sólo carga vertical y la resultante de tensiones en el terreno es uniforme.

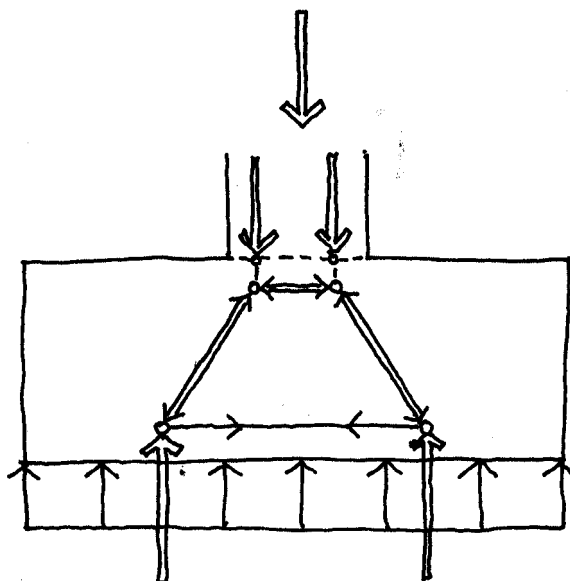


Figura CM1.1.1

En el diagrama CM 1.1.2 se presenta el caso en que la pantalla transmite un esfuerzo axial y un momento flector moderado, de forma que la excentricidad de las cargas en el arranque de la pantalla está dentro del núcleo central de la misma. De esta forma, el axial y el momento transmitidos se pueden asimilar a dos axiles de compresión. En la figura CM 1.1.2 se muestra un posible sistema resistente de bielas y tirantes.

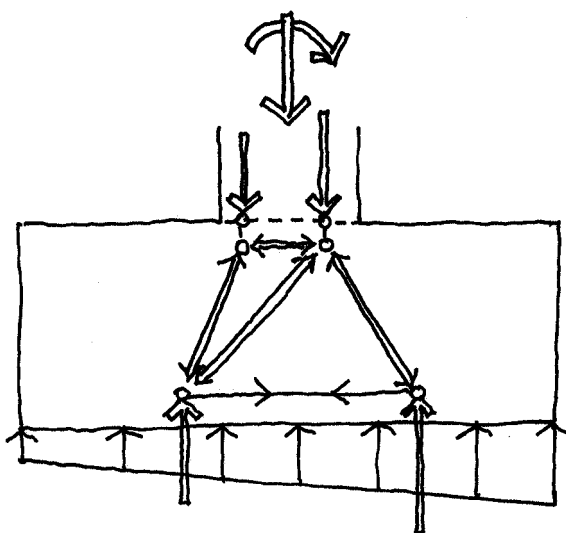


Figura CM 1.1.2

La figura CM 1.1.3 representa un caso similar al anterior, en el que el momento flector es algo superior, de forma que la excentricidad de las cargas es exterior al núcleo central de la



pantalla. Por lo tanto, las fuerzas que equivalen al axil y al momento son una compresión y una tracción en la cara superior de la zapata.

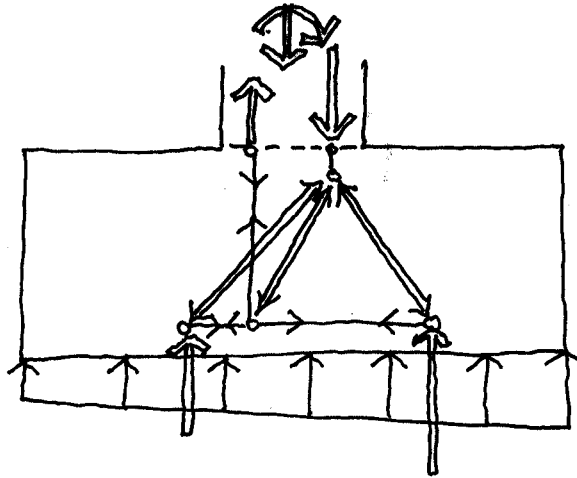


Figura CM 1.1.3

En el caso del esquema CM 1.1.4, el valor del momento es superior, de forma que existe despegue en parte de la zapata. En la citada figura se muestra la necesidad de anclar convenientemente la armadura de la pantalla y de asegurar el paso de las tracciones de ésta a la cara inferior de la zapata.

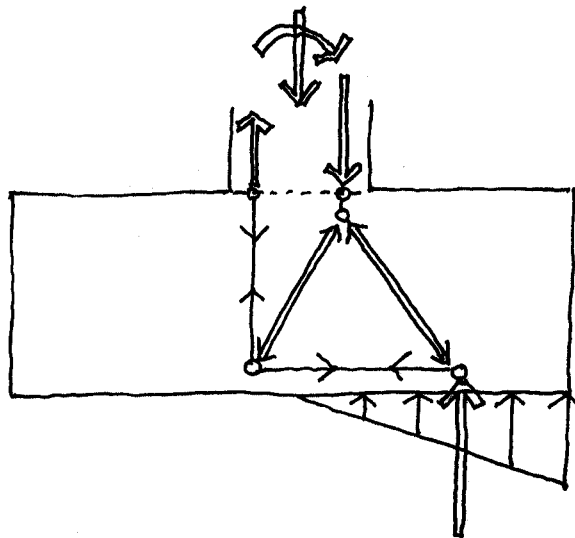


Figura CM 1.1.4

#### Zapata de muro o estribo

Los muros de edificación o los estribos de puentes son ejemplos de zapatas corridas, en las que la acción del peso de tierras equilibrantes del trasdós es fundamental para conseguir el equilibrio del sistema.

En la figura CM 1.1.5 se muestra el caso de la zapata de un muro o estribo en el que la flexión transmitida por el muro es tal que, junto con el peso de tierras equilibrante, no se produce falta de contacto entre zapata y terreno.

El sistema de bielas y tirantes de los ejemplos anteriores se completa con la existencia de un tirante situado en la parte superior del trasdós que recoge el efecto de “flexión” que produce el peso de las tierras del trasdós.

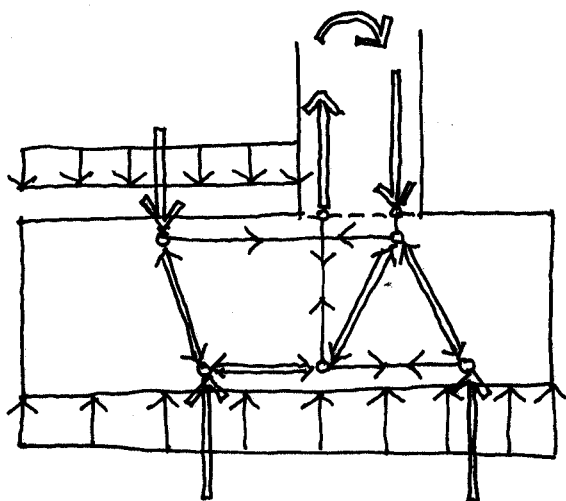


Figura CM 1.1.5

El esquema CM 1.1.6 representa el caso de un muro en el que se produce la pérdida de contacto en la parte posterior del talón.

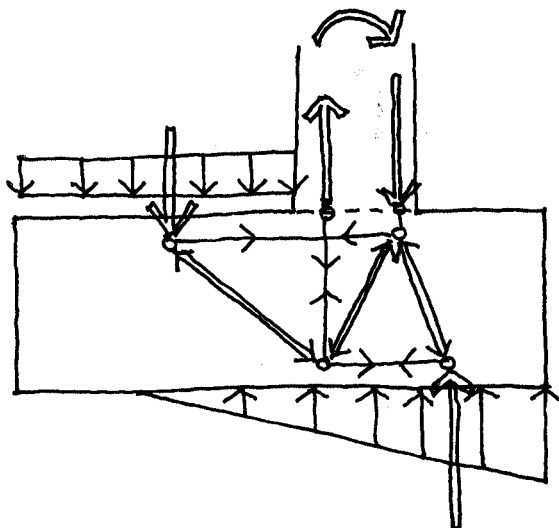


Figura CM 1.1.6

## 1.2. Encepados rígidos

Se denominan encepados rígidos aquellos en que la distancia entre el eje del pilote y la cara del pilar o soporte (vuelo) es inferior a dos veces el canto útil del encepado.

### Encepado de dos pilotes

En la figura CM 1.2.1 se muestra el caso de un encepado de dos pilotes en el que el pilar está trabajando a flexión esviada. En este caso, se produce una flexión lateral en los pilotes.

El modelo de bielas y tirantes indica cómo se debe anclar la armadura del pilar y de los pilotes para asegurar la transmisión de la flexión lateral desde el pilar a los dos pilotes.

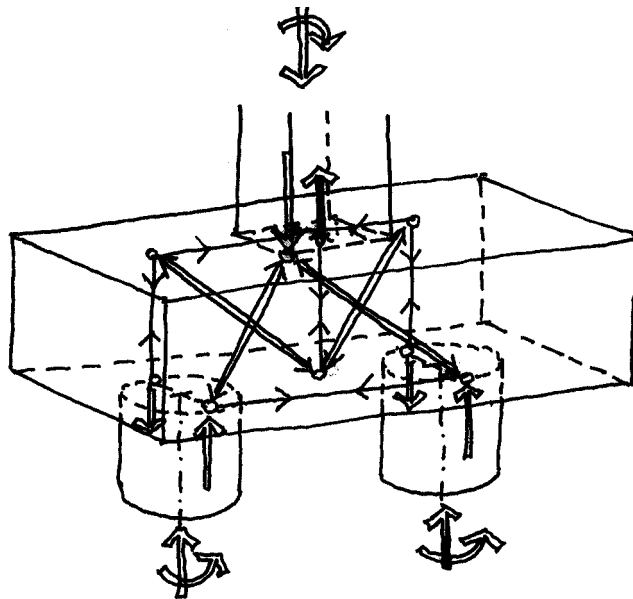


Figura CM 1.2.1

### Encepado de tres pilotes

En los esquemas representados en las figuras CM 1.2.2 y CM 1.2.3, se indican sistemas resistentes de bielas y tirantes que explican el flujo de fuerzas desde el pilar a los pilotes.

En la figura CM 1.2.2, el pilar o pila transmite sólo esfuerzo axial, lo que produce un esquema clásico en el que las compresiones se difunden hacia los pilotes que se conectan entre sí mediante “bandas de armaduras” para absorber las tracciones resultantes.

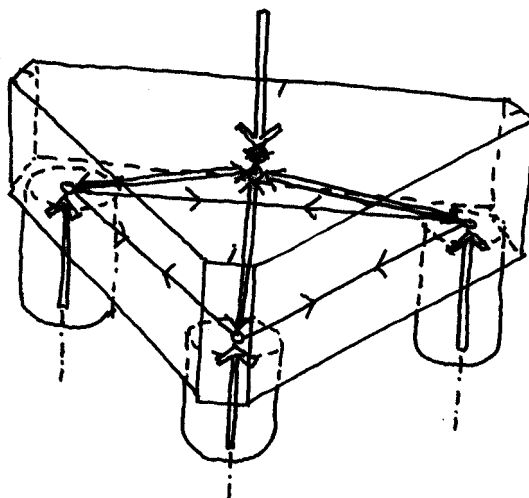


Figura CM 1.2.2

Si la pila o pilar está sometida además del axil a una pareja de momentos, el mecanismo es algo más complejo (figura CM 1.2.3). En el esquema puede observarse además la necesidad de anclar convenientemente la armadura en el fondo del encepado.

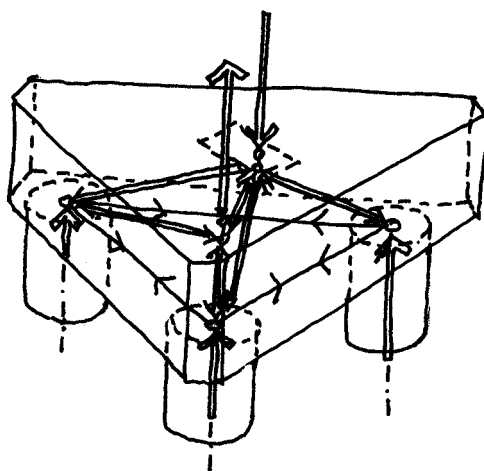


Figura CM 1.2.3

#### Encepado de cuatro pilotes

En los esquemas representados en las figuras CM 1.2.4 y CM 1.2.5 se indican sistemas resistentes de bielas y tirantes que explican el flujo de fuerzas desde el pilar a los pilotes.

En la figura CM 1.2.4, el pilar o pila transmite sólo esfuerzo axil, lo que produce un esquema clásico en el que las compresiones se difunden hacia los cuatro pilotes que se conectan entre sí mediante "bandas de armaduras" para absorber las tracciones resultantes.

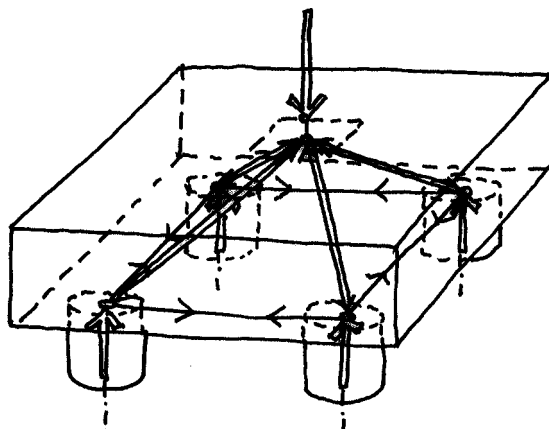


Figura CM 1.2.4

Si la pila o pilar está sometida además del axil a una pareja de momentos, el mecanismo es algo más complejo (figura CM 1.2.5). En el esquema puede observarse además la necesidad de anclar convenientemente la armadura en el fondo del encepado.

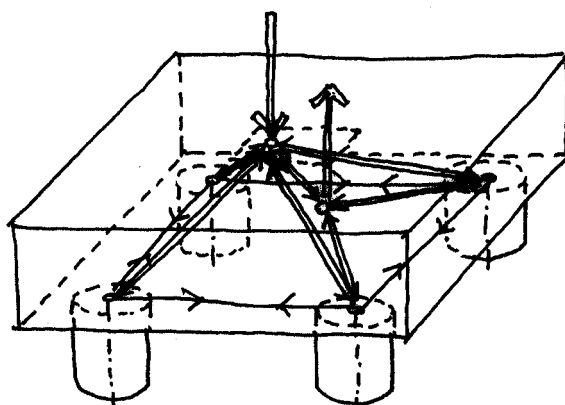


Figura CM 1.2.5

En el ***ejemplo de aplicación EC 3*** del siguiente capítulo se recoge un caso más complejo de encepado de 6 pilotes.

## 2. ZONAS DE INTRODUCCIÓN DEL PRETENSADO

La introducción del pretensado en un elemento estructural constituye siempre una región D, debido a la concentración de tensiones que se produce en los anclajes o zona de transferencia del pretensado.

## 2.1. Anclaje de armaduras pretesas

En CM 2.1.1 se puede apreciar el caso de una viga pretesa, en el que sólo existe armadura activa en la parte inferior de la sección transversal. En esta zona en la que el pretensado es preponderante frente a la flexión debida al peso propio, se pueden llegar a producir tracciones en la cara superior de la viga. Por otra parte, se producirán unas tracciones transversales y verticales importantes como consecuencia de la introducción de la compresión en la zona de transferencia.

En la figura CM 2.1.1 se incluye un sistema de bielas y tirantes que puede explicar el flujo de compresiones y tracciones desde la zona de anclaje hasta una sección en la que la distribución de tensiones cumple las hipótesis de Bernouilli Navier.

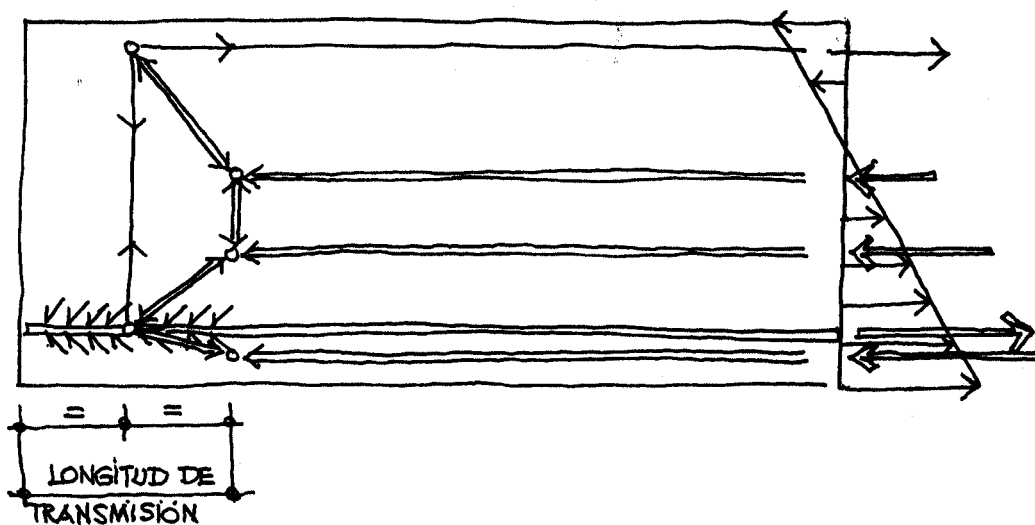


Figura CM 2.1.1

En la figura CM 2.1.2 se indica una posible armadura pasiva resultante del modelo de bielas y tirantes indicado anteriormente.

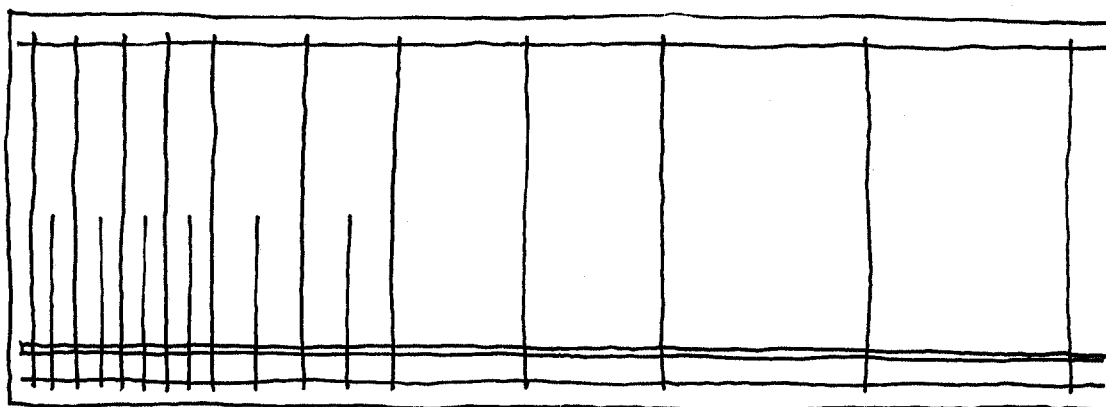


Figura CM 2.1.2

## 2.2. Anclaje de armaduras postesas

En el caso de elementos postesados, como puede ser el caso de tableros de puentes o losas postesadas de edificación, ocurre frecuentemente que la discontinuidad producida por la fuerza en el anclaje se suma a la que se produce por la presencia de un apoyo próximo.

En la figura CM 2.2.1 se representa un caso en el que el anclaje de pretensado se encuentra próximo al extremo de la viga lo que supone un sistema complejo. En la citada figura se recoge un posible sistema resistente de bielas y tirantes, en la hipótesis de que la sección adyacente a la zona de discontinuidad se halla completamente comprimida para el sistema de cargas y esfuerzos actuantes.

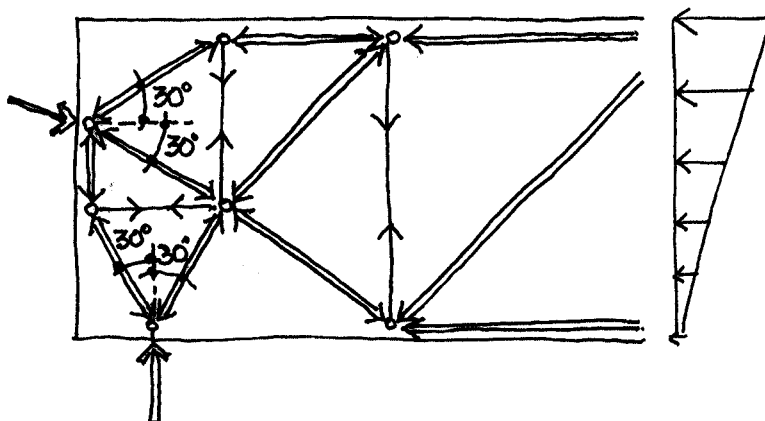


Figura CM 2.2.1

En CM 2.2.2 se presentan las armaduras compatibles con el sistema de bielas y tirantes indicado.

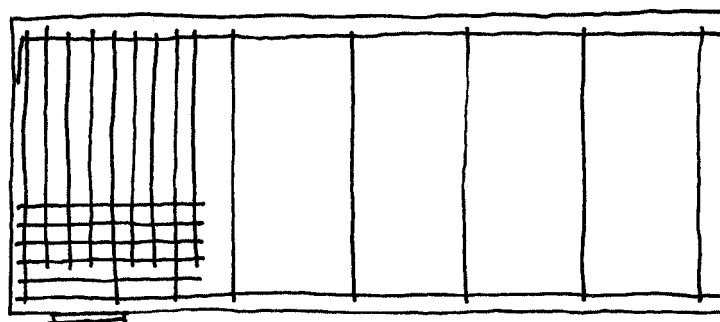


Figura CM 2.2.2

En el esquema CM 2.2.3 se presenta una situación similar, pero en ella la sección adyacente presenta un estado de flexocompresión positiva, con tracciones en la cara inferior del elemento.

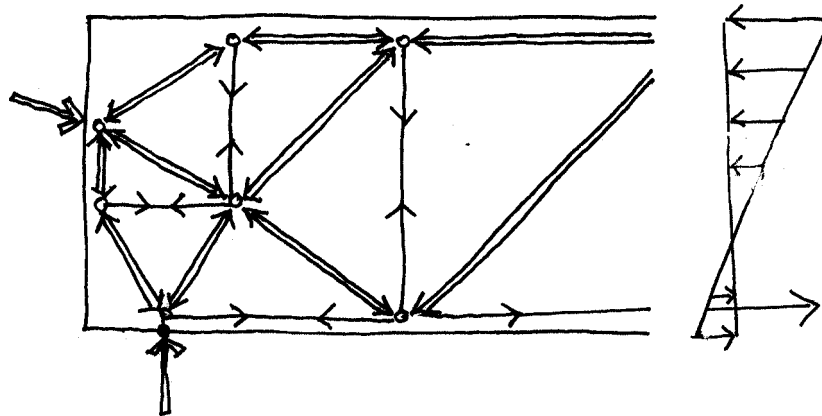


Figura CM 2.2.3

En CM 2.2.4 se indican de forma esquemática unas armaduras compatibles con el sistema resistente supuesto.

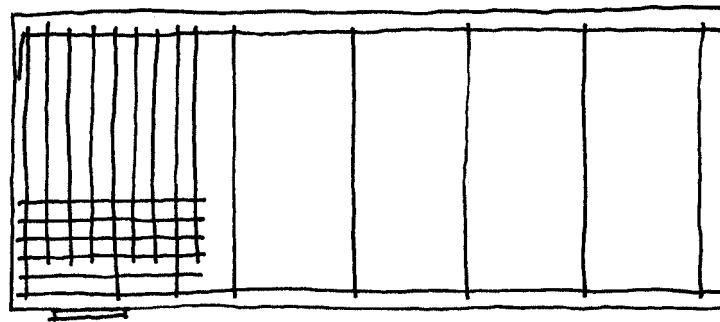


Figura CM 2.2.4

En el esquema indicado en CM 2.2.5 se presenta el caso de un anclaje situado en el extremo de un elemento sin presencia de apoyos próximos. En este caso un posible mecanismo resistente es el indicado en la citada figura.

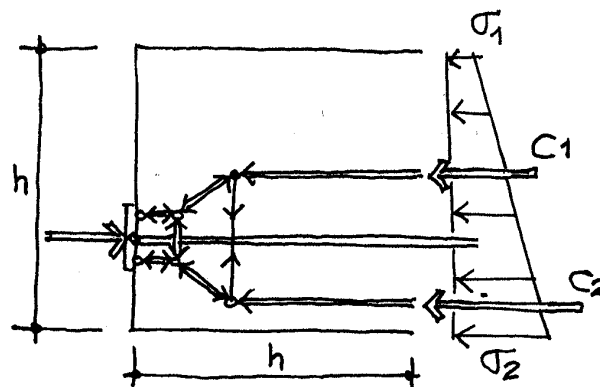


Figura CM 2.2.5



En este caso es suficiente, tal y como se deduce del mecanismo de CM 2.2.5 el disponer una armadura para coser la dispersión de las compresiones en las inmediaciones del anclaje (figura CM 2.2.6)

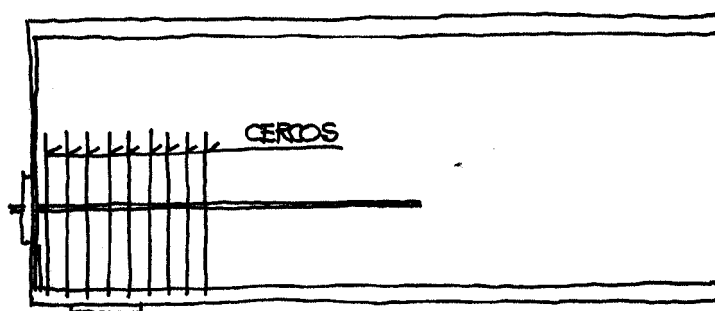


Figura CM 2.2.6

Por último, en la figura CM 2.2.7 se presenta un caso similar al anterior, pero en el que el pretensado por su excentricidad produce tracciones longitudinales en la parte superior del elemento.

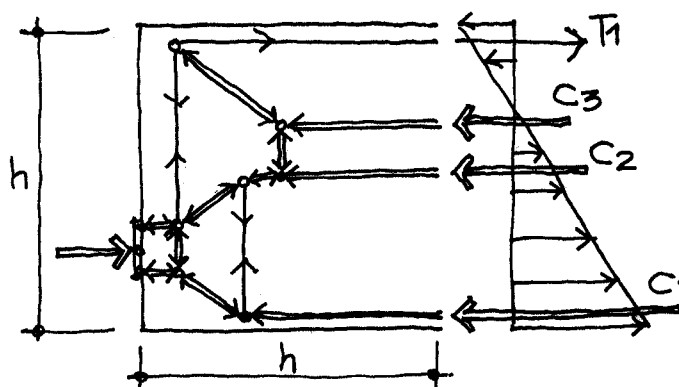


Figura CM 2.2.7

En este caso es necesario disponer una armadura vertical y otra horizontal en cara superior del elemento, además de la necesaria en la zona local del anclaje (figura CM 2.2.8)

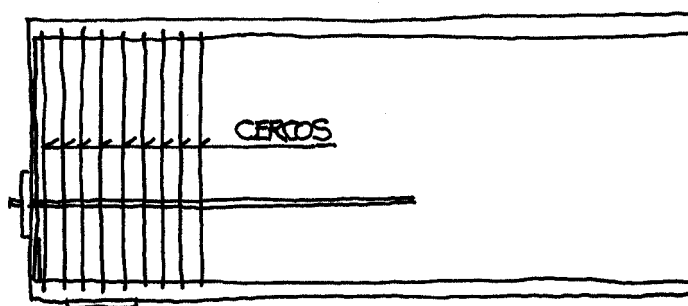


Figura CM 2.2.8

### 3. EDIFICACIÓN

Se recogen a continuación algunos nudos de edificación en los que es de aplicación el método de las bielas y tirantes.

Los nudos de pórticos o jácenas son regiones de discontinuidad de tipo geométrico. Además, en ellos se producen normalmente cambios en la dirección o signo de los esfuerzos como consecuencia de la concurrencia de varios elementos estructurales: elementos horizontales como pueden ser vigas, zunchos o losas, y elementos verticales como pilares.

En la figura CM 3.1.1, se indican diversas situaciones de nudos de pilares de esquina en su última planta.

En la parte superior de la figura se indica el caso habitual en que la viga transmite un momento negativo al pilar. En ese caso hay que asegurar la transmisión de la tracción desde la cara superior de la viga, a la cara exterior del soporte.

En la parte inferior de la figura se muestra el caso de momento inverso al anterior, que puede presentarse por ejemplo en el caso de acciones horizontales importantes. En ese caso hay que asegurar el anclaje de la armadura inferior de la viga y de la armadura interior del pilar.

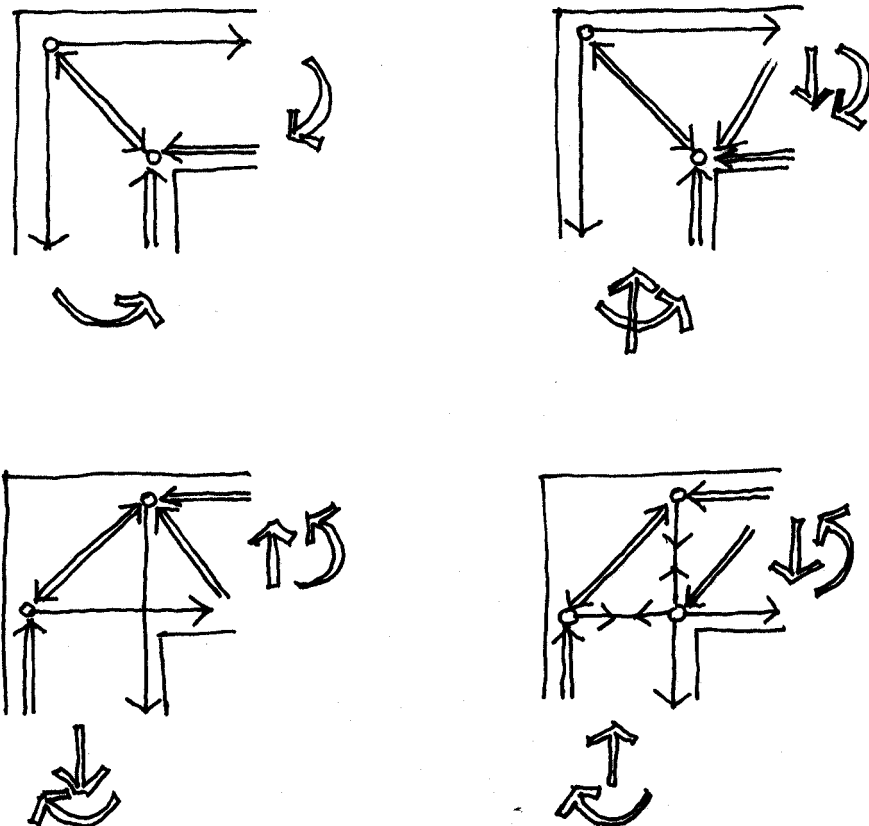


Figura CM 3.1.1

En el caso de un nudo intermedio de un pilar de borde, podrían suponerse esquemas de funcionamiento como los indicados en la figura CM 3.1.2. En el caso de los tres dibujos de la izquierda se representan situaciones gobernadas por las cargas gravitatorias (momento negativo en extremo de viga), mientras que en el caso de los tres dibujos de la derecha se trata de situaciones gobernadas por las cargas horizontales, en las que existen momentos positivos en el extremo de la viga.

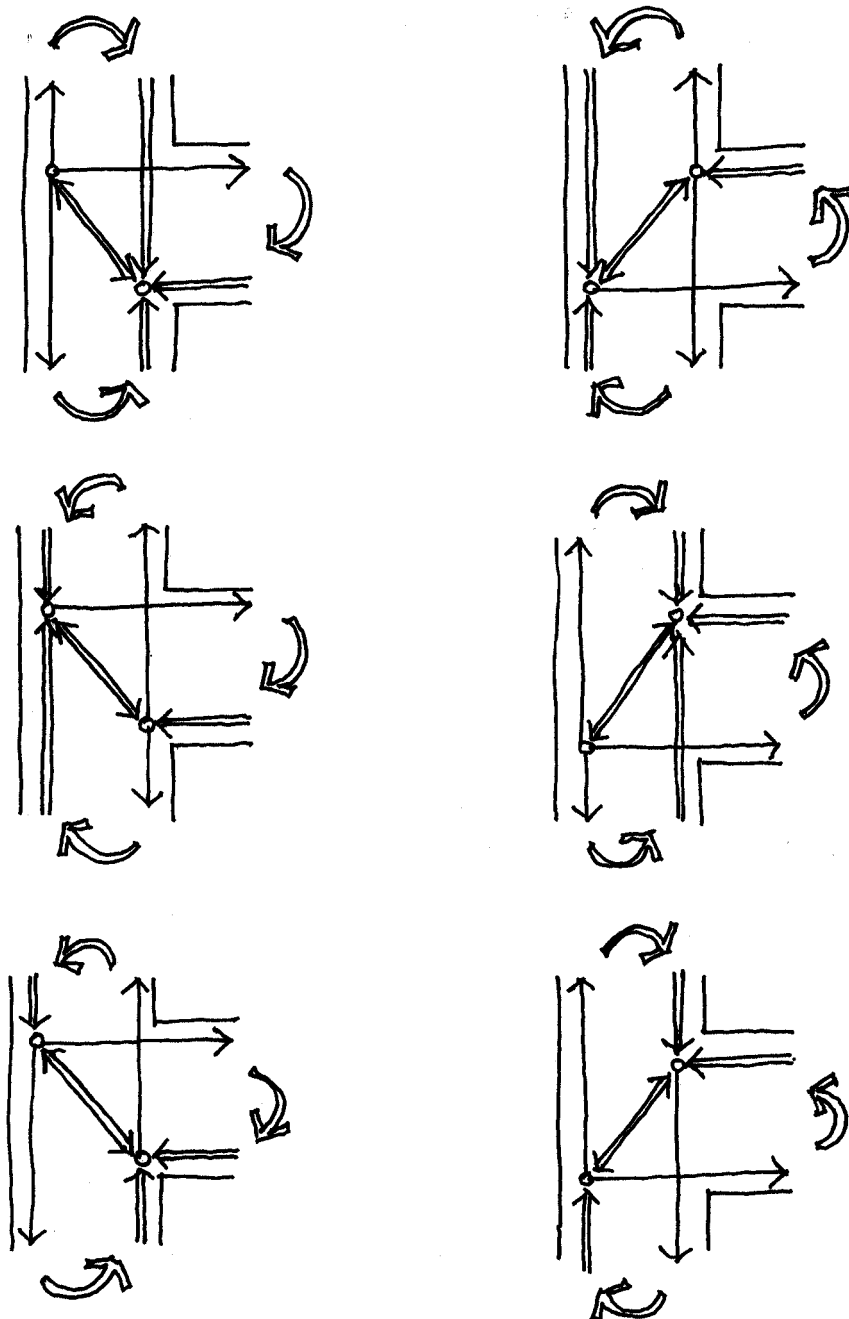


Figura CM 3.1.2

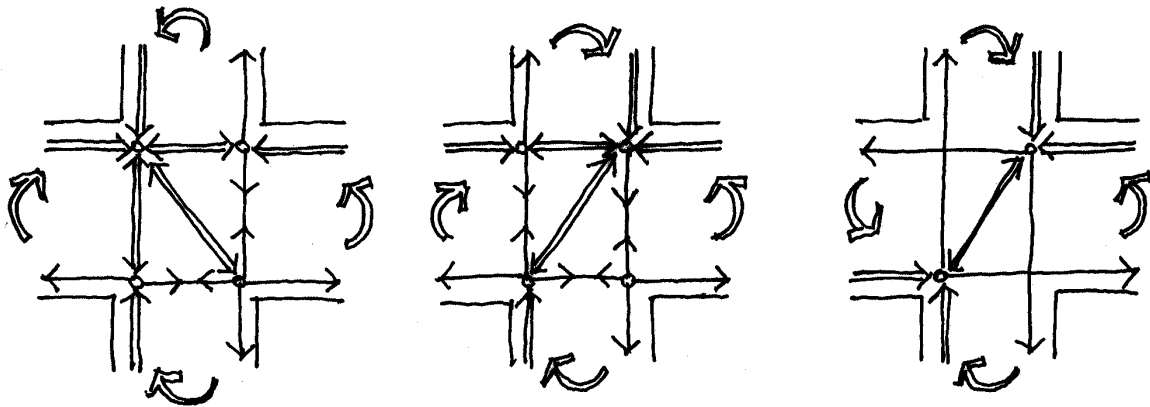


Figura CM 3.1.3.

En la figura CM 3.1.3 se indican posibles situaciones de nudos interiores.

En los **ejemplos de aplicación EE 1, EE 2 y EE 3** se recogen algunos problemas típicos de edificación, como el caso de ménsulas cortas, vigas de gran canto y cambios de canto en vigas, que completan la colección anterior.

## 4. PUENTES

### 4.1. Introducción del pretensado en zonas interiores

Es habitual en algunas tipologías de tableros de puentes de hormigón, como por ejemplo en el caso de secciones en cajón, la introducción de cables de pretensado mediante anclajes activos en las tablas superior o inferior de la sección.

En estos casos se presentan, además de las tracciones producidas por la dispersión de las compresiones introducidas localmente, unas tracciones de compatibilidad longitudinal.

En la figura CM 4.1.1 se muestra el caso pésimo en que la parte del tablero situada tras el anclaje está fuertemente coaccionada, lo que supone que por compatibilidad será necesario coser hacia atrás el 50% de la carga introducida en el anclaje. En otros casos más favorables podrá reducirse este valor en función de la coacción existente.

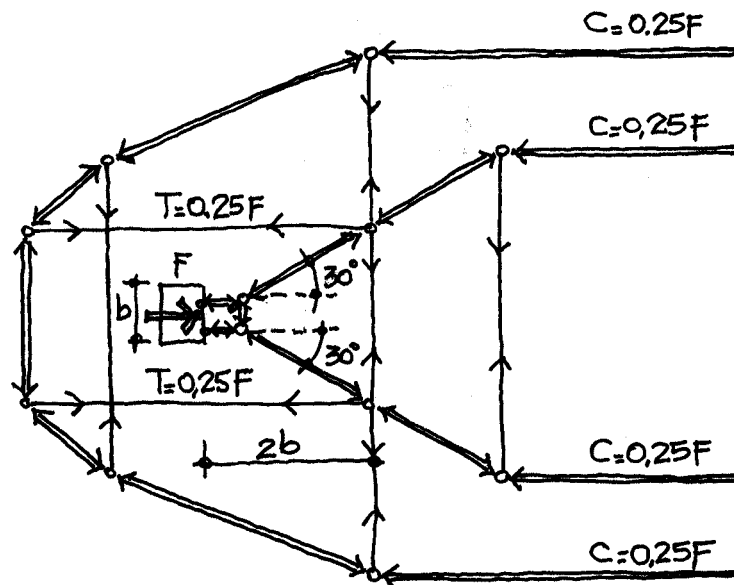


Figura CM 4.1.1

En la figura CM 4.1.2 se indica una disposición de armaduras compatible con el modelo de bielas y tirantes descrito anteriormente.

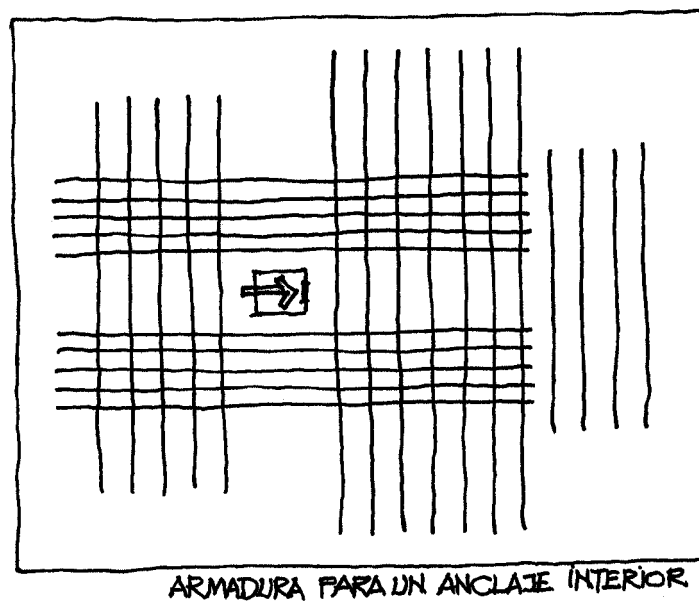


Figura CM 4.1.2

## 4.2. DIAFRAGMAS

Los diafragmas de secciones cajón son un paradigma de regiones D. Las tipologías de los mismos dependen de su configuración geométrica y del estado de cargas.

#### 4.2.1. Diafragmas de sección cajón con apoyos situados bajo las almas

En este caso, las cargas verticales (cortantes en las almas del cajón) se transmiten directamente a los apoyos. Por lo tanto se produce una transferencia directa de cargas.

No obstante, la presencia de momentos torsores, consecuencia de la excentricidad de las cargas o de la curvatura, y de cortantes de eje horizontal, como los producidos por la fuerza centrífuga, viento o sismo, suponen el paso de fuerzas desde las tablas superiores e inferiores de la sección transversal a los apoyos, a través del diafragma (figura CM 4.2.1).

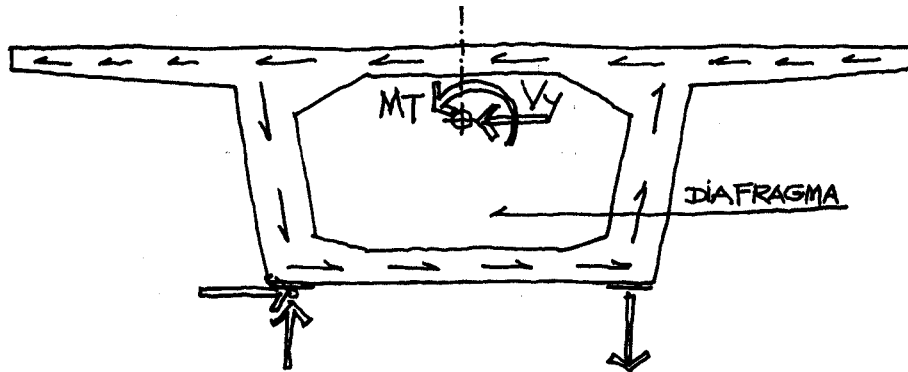


Figura CM 4.2.1

El sistema de bielas y tirantes indicado en la figura CM 4.2.2, puede representar el comportamiento del diafragma. Se puede observar la necesidad de disponer una armadura en malla, para absorber las tracciones que se producen en el elemento.

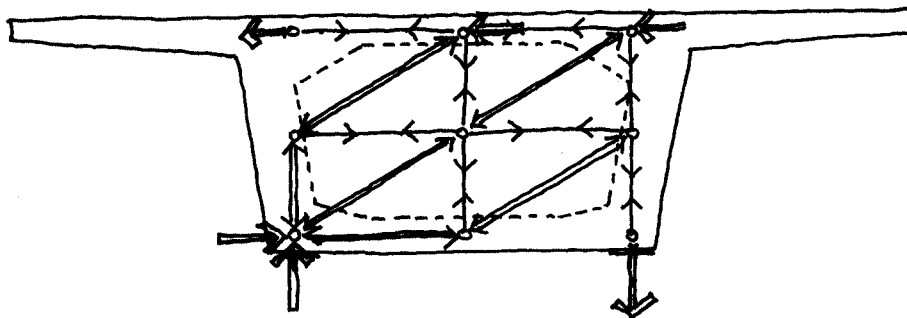


Figura CM 4.2.2

En el caso en que el diafragma presente un hueco para inspección, tal y como se indica en la figura CM 4.2.3, el mecanismo de bielas y tirantes se modifica, siendo necesario el refuerzo mediante armadura de las zonas próximas al hueco.

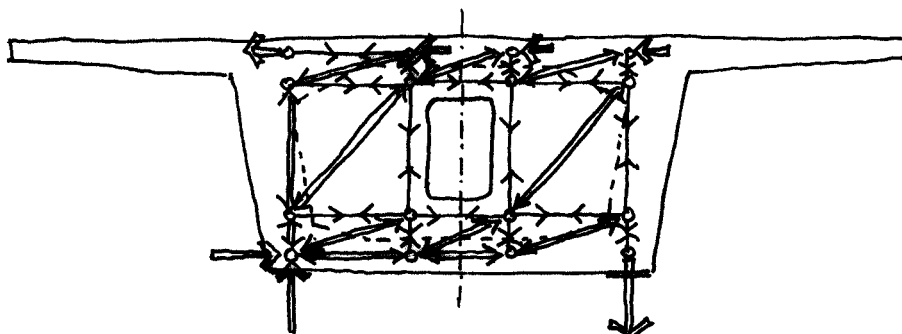


Figura CM 4.2.3

#### 4.2.2. Diafragmas de sección cajón con apoyo único

En este caso el objeto fundamental del diafragma consiste en dar paso a las cargas verticales desde las almas hasta el apoyo central.

En las figuras CM 4.2.4 a CM 4.2.6, se muestran posibles sistemas de bielas y tirantes que permiten explicar el comportamiento del diafragma.

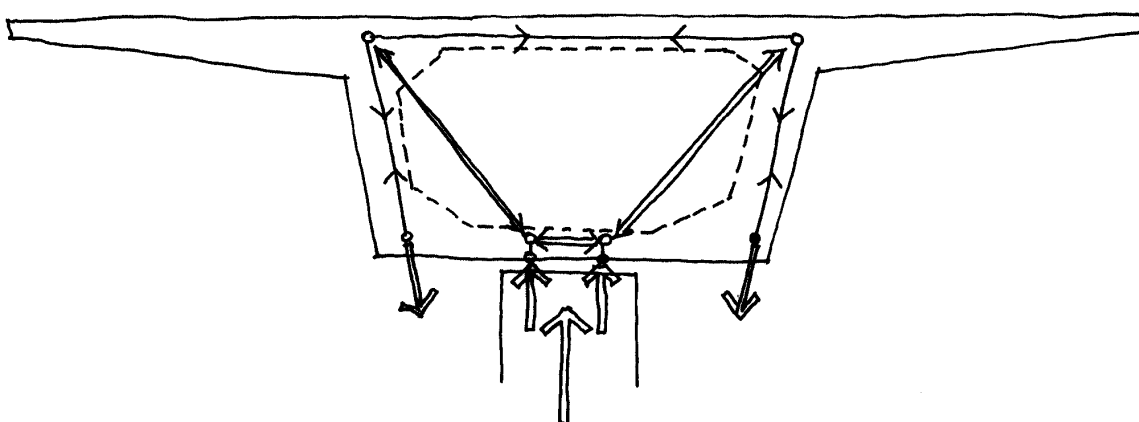


Figura CM 4.2.4

En el mecanismo indicado en la figura CM 4.2.4, se ha decidido colgar el cortante en la zona del alma, mientras que en la figura CM 4.2.5 se cuelga esta carga en el propio diafragma.

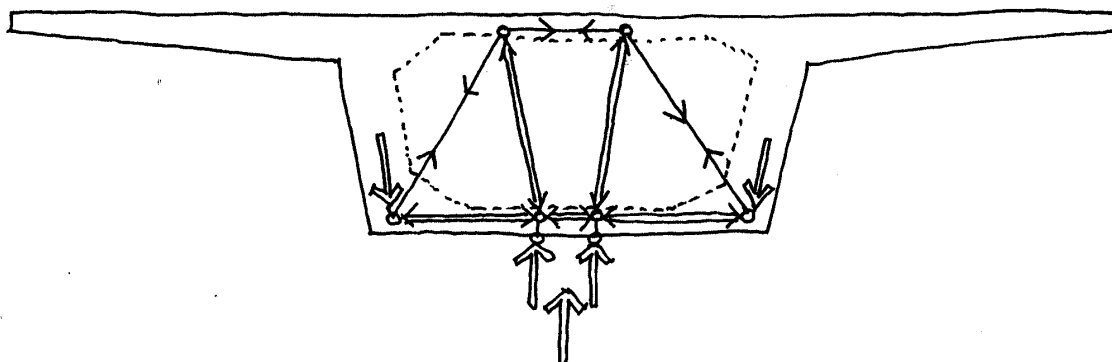


Figura CM 4.2.5

En la figura CM 4.2.6 se muestra una solución intermedia entre las dos anteriormente citadas.

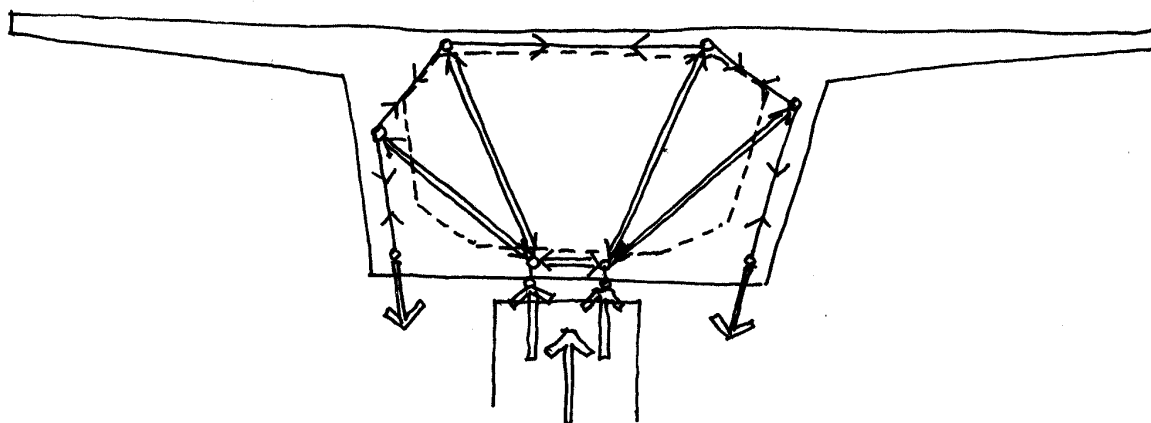


Figura CM 4.2.6

#### 4.2.3. Diafragmas en uniones monolíticas tablero-pila

En el caso de puentes de hormigón de gran luz con sección cajón, en los que se une monolíticamente el tablero a la pila, los diafragmas deben permitir la transmisión de momentos flectores desde el tablero a la pila, producidos como consecuencia del carácter empotrado de la unión.



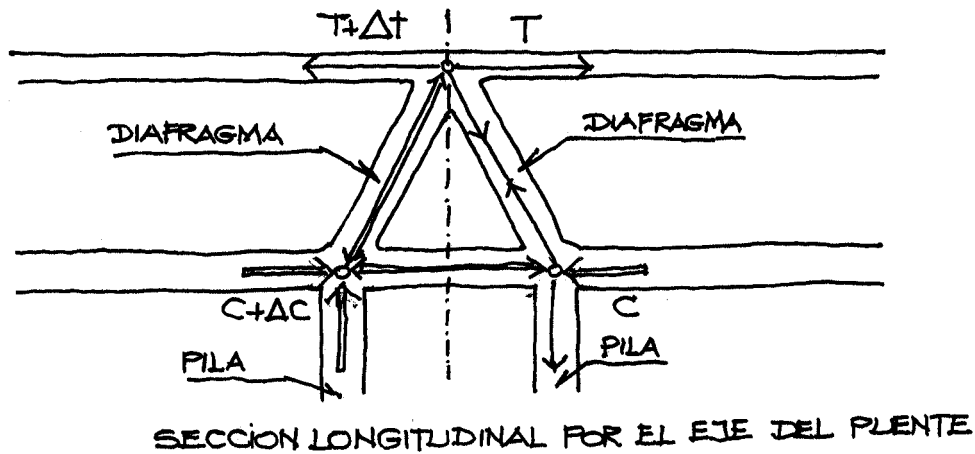


Figura CM 4.2.7

Una de las posibles soluciones a este tipo de uniones es la que se indica en la figura CM 4.2.7. en la que se puede apreciar la presencia de dos diafragmas inclinados que permiten el paso a través de ellos de las compresiones y tracciones que se generan en la unión.

#### 4.2.4. Diafragmas de estribos

En el caso de estribos suele ser posible aumentar de la separación entre apoyos con objeto de aumentar el brazo requerido para transmitir adecuadamente la torsión del tablero al estribo mediante un par de fuerzas.

En este caso se plantea la necesidad de transmitir los cortantes desde las almas hasta los dos apoyos. En la figura CM 4.2.8, se presenta el caso en que la torsión es pequeña y es preponderante el cortante que se transmite por las almas.

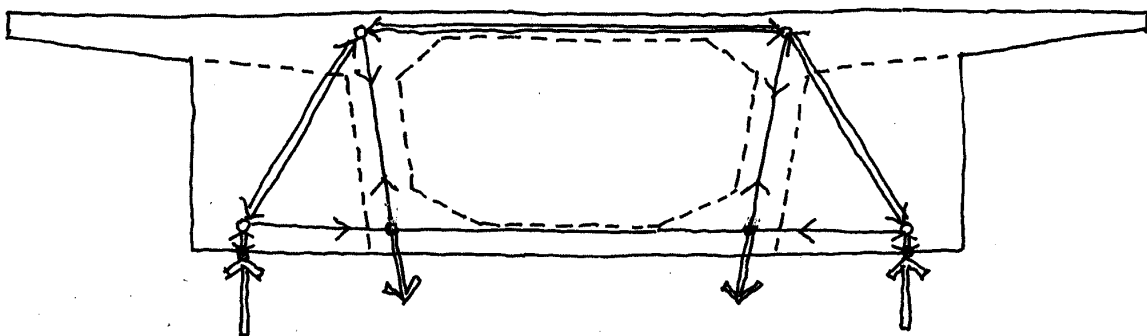


Figura CM 4.2.8

Si la torsión es mayor, pero sin que se produzcan todavía reacciones negativas en los apoyos, un posible sistema resistente es el que se indica en la figura CM 4.2.9

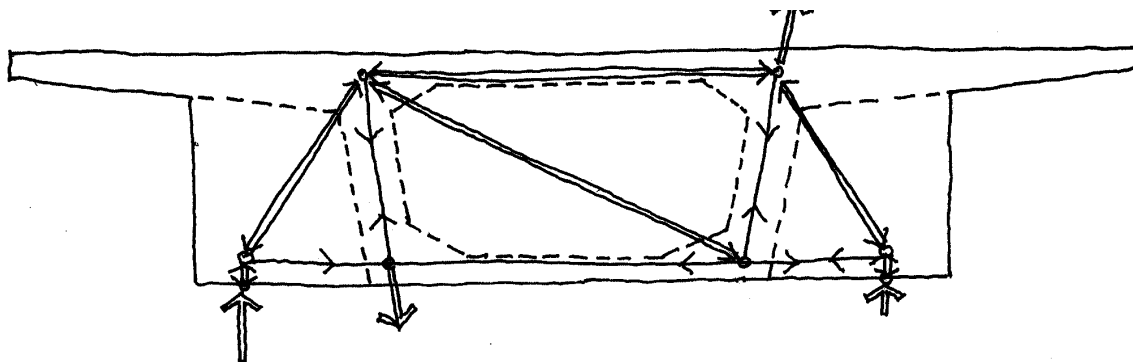


Figura CM 4.2.9

Por último, en la figura CM 4.2.10 se indica el caso extremo en que la torsión es tal que se llegan a producir tracciones en un apoyo, lo que implicará la necesidad de anclarlo.

Tal y como puede observarse en la citada figura, en este caso será necesaria una armadura en la cara superior del diafragma.

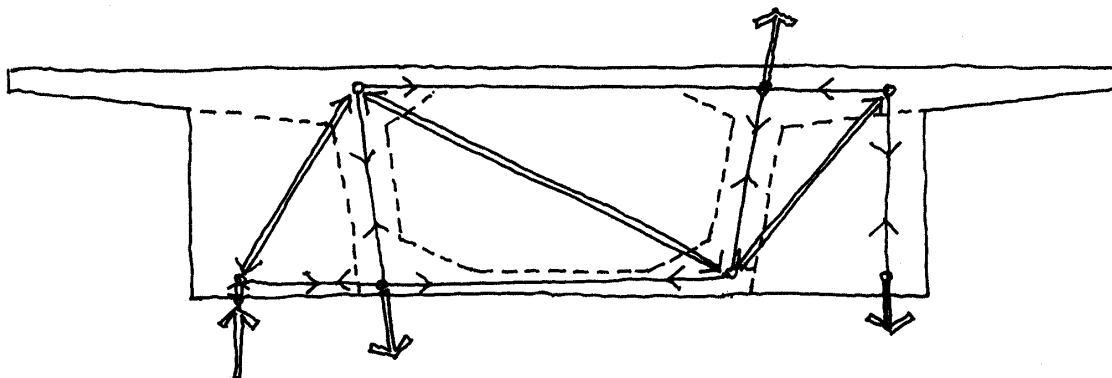


Figura CM 4.2.10

#### 4.2.5. Diafragmas en tablero con sección en forma de pí

En esta tipología de tableros es habitual que los apoyos se sitúen inmediatamente por debajo de las almas del tablero.

Uno de los objetos del diafragma es la transmisión del cortante de eje horizontal a los apoyos (figura CM 4.2.11)

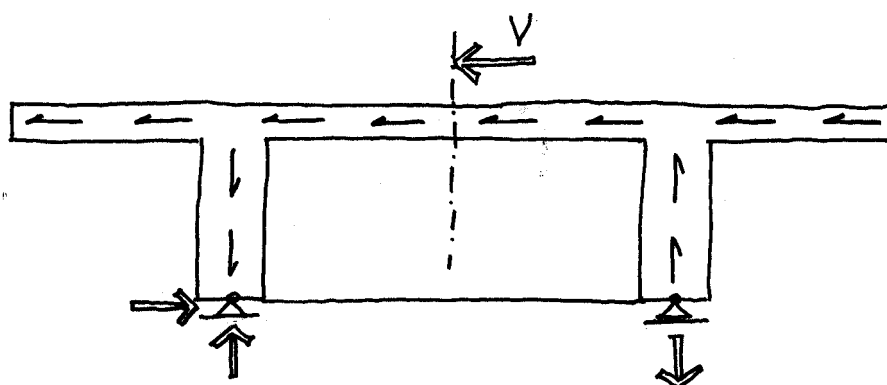


Figura CM 4.2.11

Así mismo, el diafragma deberá permitir el empotramiento a torsión del tablero en la sección de apoyos (figura CM 4.2.12).

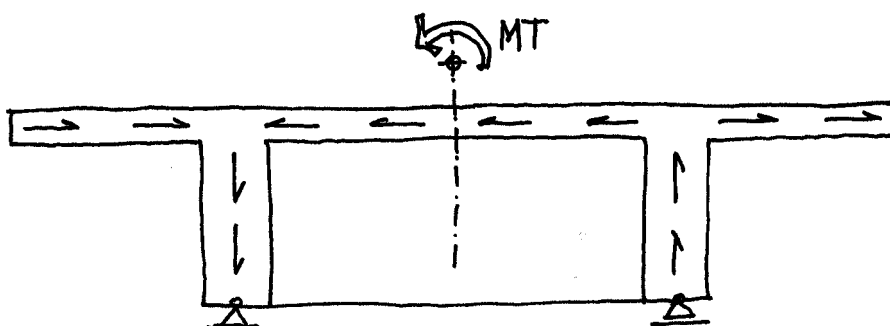


Figura CM 4.2.12

En la figura CM 4.2.13 se muestra un sistema de bielas y tirantes que permitiría explicar el paso de los esfuerzos anteriormente indicados desde el tablero a los apoyos.

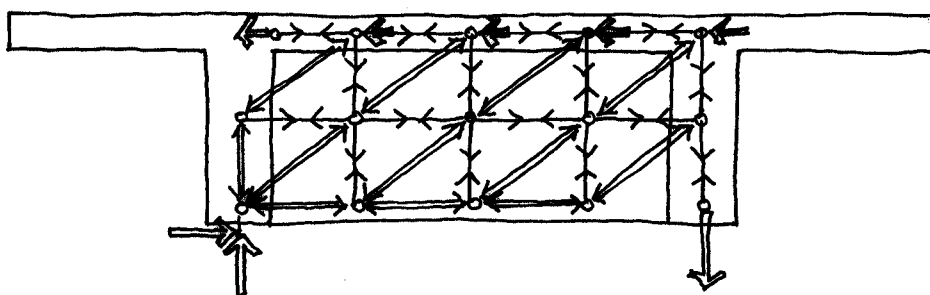


Figura CM 4.2.13

#### 4.3. Cabeceros de pilas

En el caso de pilas con fuste único y cabecero amplio, es necesario transmitir al fuste las cargas que habitualmente se sitúan en los extremos del cabecero.

En el caso en que las fuerzas en el dos extremos del cabecero sean similares (situación de axil máximo), un mecanismo como el indicado en la figura CM 4.3.1 puede explicar la transmisión de los axiles de los apoyos al fuste.

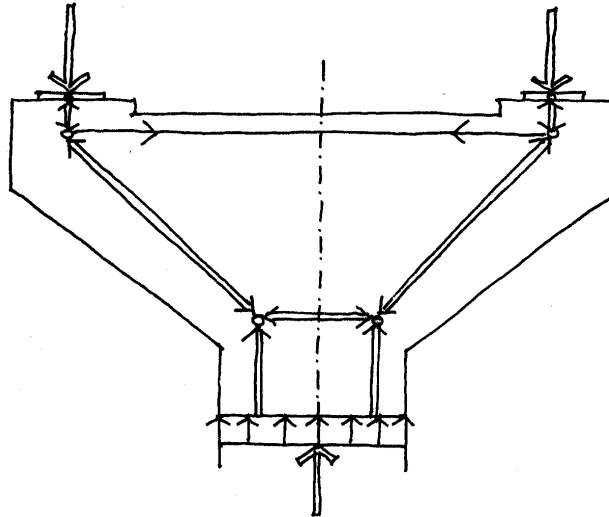


Figura CM 4.3.1

En el caso de mayor excentricidad de carga, aunque la resultante de las mismas pase por el núcleo central del fuste, un posible mecanismo de bielas y tirantes es el indicado en CM 4.3.2

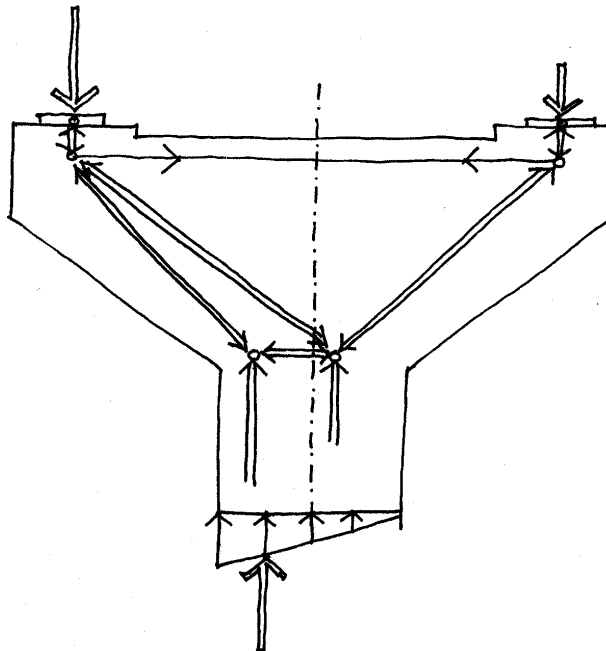


Figura CM 4.3.2

En el caso en que la reacción en un apoyo sea nula, un posible mecanismo es el de la figura CM 4.3.3. En él puede observarse la necesidad de transmitir la tracción de una cara del fuste a la cara superior del dintel.

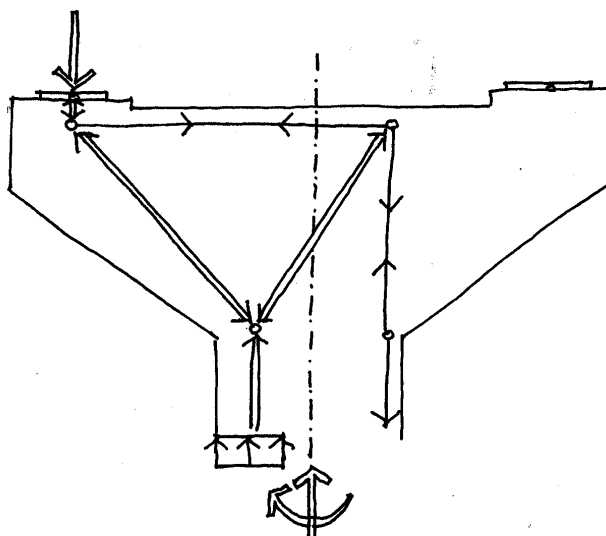


Figura CM 4.3.3

Un caso extremo de excentricidad sería el indicado en la figura CM 4.3.4 en el que es necesario anclar un apoyo (caso infrecuente en la práctica).

En el ***ejemplo de aplicación EP 2*** del siguiente capítulo se recoge un caso intermedio entre los indicados en CM 4.3.2 y CM 4.3.3, que representa una configuración de solicitaciones más frecuente en la práctica.

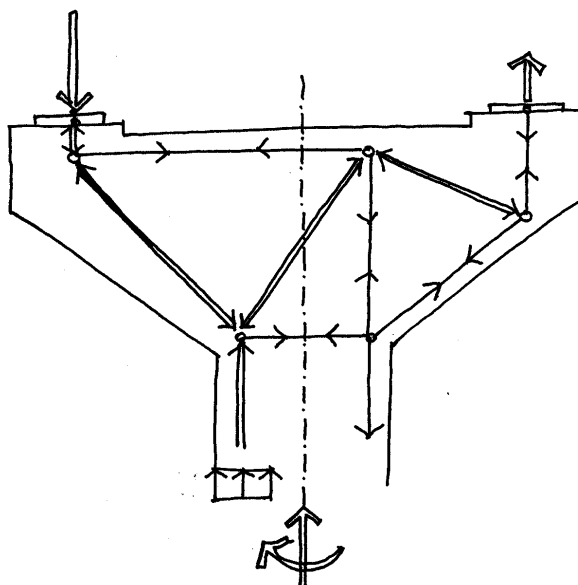


Figura CM 4.3.4.

## **CAPÍTULO II. EJEMPLOS DE APLICACIÓN**

**EC.1. Zapata sometida a flexión recta**

La zapata aislada de la figura EC1.1 tiene de dimensiones 1.90 x 1.90 x 0.60. Se construye con hormigón H-25 y acero B-500-S. suponemos un control normal será  $\gamma_c = 1.50$  y  $\gamma_s = 1.15$ . Se desea dimensionar la zapata por el método de bielas y tirantes para dos situaciones de carga:

Hipótesis 1:  $N_d = 850$  kN  
 $M_d = 45$  kNm

Hipótesis 2:  $N_d = 500$  kN  
 $M_d = 200$  kNm

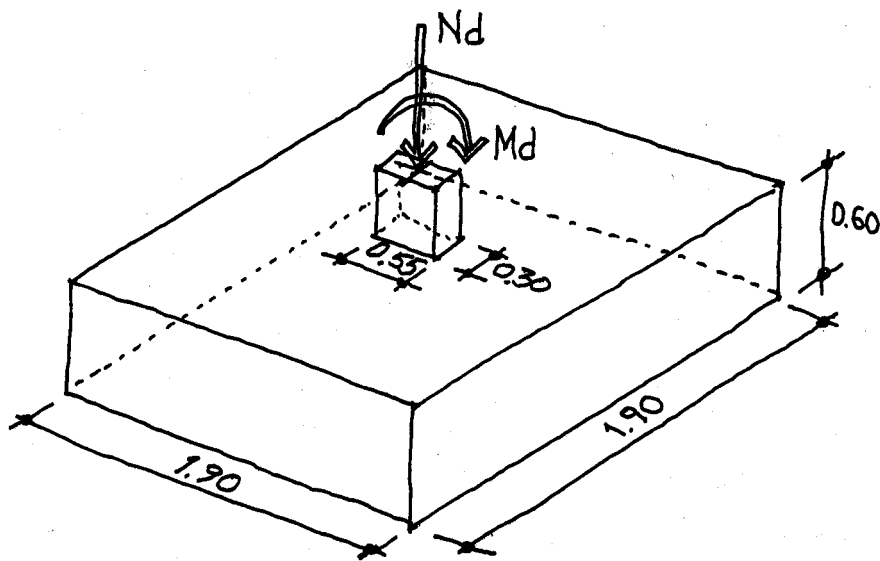


Figura EC1.1

### HIPÓTESIS – 1

#### **1º PLANTEAMIENTO DEL MECANISMO RESISTENTE**

$\frac{\text{vuelo}}{\text{canto}} \leq 2 \longrightarrow$  zapata rígida, luego es de aplicación el MBT

Se calculan en primer lugar las tensiones en el terreno.



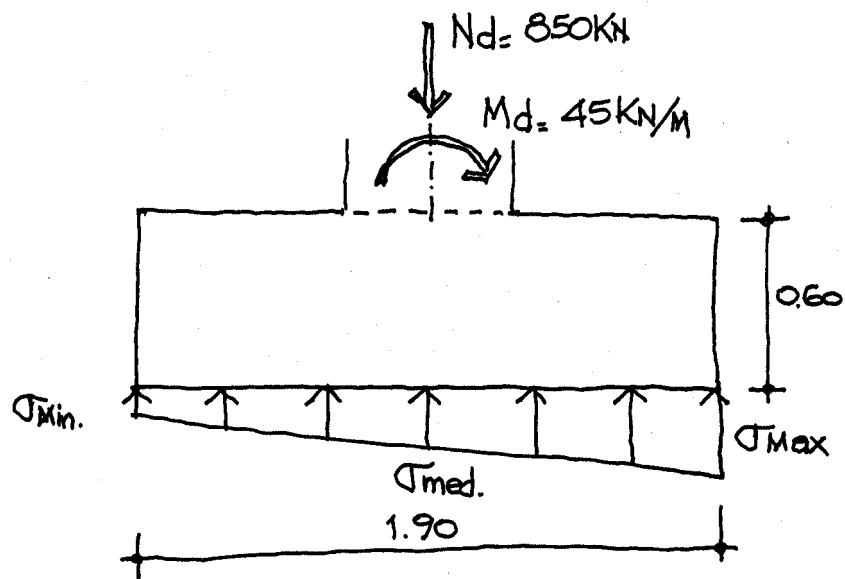


Figura EC1.2

$$e = \frac{M_d}{N_d} = \frac{45}{850} = 0.053 < \frac{L}{6} = \frac{1.90}{6} = 0.317 \Rightarrow \text{Distribución de presiones trapezoidal.}$$

$$\sigma_{med} = \frac{850}{1.90^2} = 235.46 \text{ kN/m}^2$$

$$\Delta\sigma = \frac{6M_d}{L^3} = \frac{6 \cdot 45}{1.90^3} = 39.36 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_{max} = 235.46 + 39.36 = 274.8 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_{min} = 235.46 - 39.36 = 196.1 \text{ kN/m}^2$$

Se determinan a continuación las resultantes de las tensiones del terreno  $R_{1d}$  y  $R_{2d}$

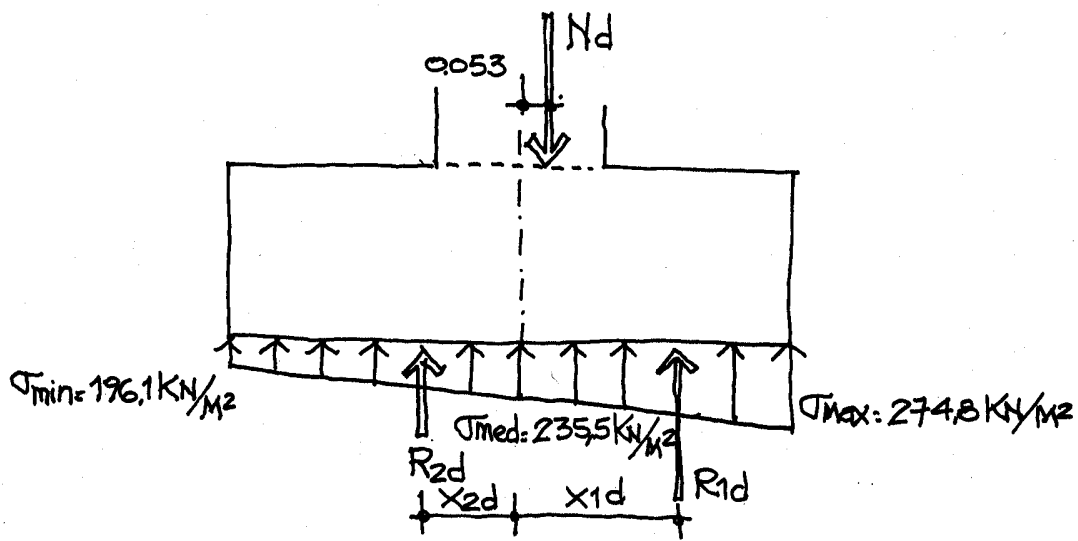


Figura EC1.3

$$R_{1d} = \frac{1}{2}(274.8 + 235.5) \cdot \frac{1.90^2}{2} = 460.5 \text{ kN}$$

$$X_{1d} = 0.95 - \frac{0.95}{3} \left( \frac{2 \cdot 235.5 + 274.8}{235.5 + 274.8} \right) = 0.487 \text{ m}$$

$$R_{2d} = \frac{1}{2}(235.5 + 196.1) \cdot \frac{1.90^2}{2} = 389.5 \text{ kN}$$

$$X_{2d} = \frac{0.95}{3} \left( \frac{2 \cdot 196.1 + 235.5}{235.5 + 196.1} \right) = 0.461 \text{ m}$$

Un posible sistema resistente es el indicado en la figura EC1.4.

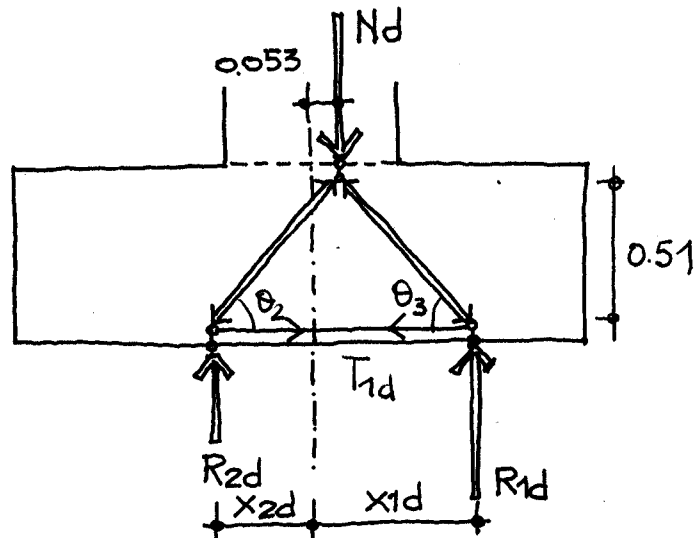


Figura EC1.4

Suponiendo un canto de la celosía  $0.60 - 0.045 - 0.045 = 0.51$  m, y conocidos  $x_{1d}$  y  $x_{2d}$  se pueden determinar  $\theta_2$  y  $\theta_3$ :

$$\theta_2 = 44.83^\circ$$

$$\theta_3 = 49.60^\circ$$

$$C_{12d} = \frac{389.5}{\text{sen } 44.83^\circ} = 552.5 \text{ kN}$$

$$C_{13d} = \frac{460.8}{\text{sen } 49.60^\circ} = 605.1 \text{ kN}$$

El esquema plano indicado en la figura EC1.4 es tan solo la proyección sobre un plano del esquema tridimensional indicado en la figura EC1.5.

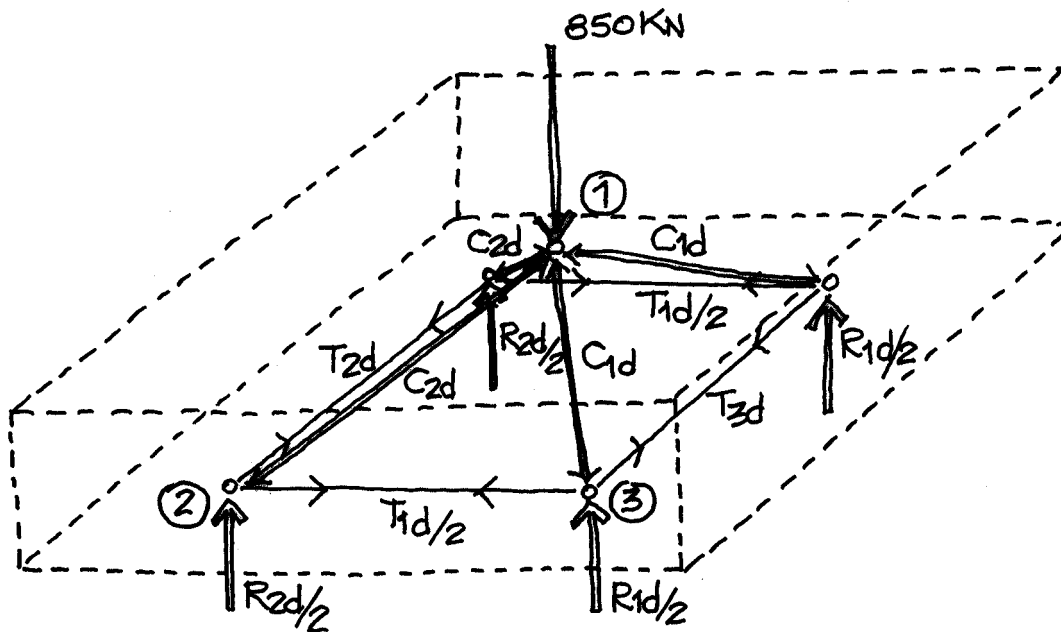


Figura EC1.5

## 2º OBTENCIÓN DE ESFUERZOS Y COMPROBACIÓN DEL EQUILIBRIO

Del esquema de la figura EC1.4 se puede deducir.

$$T_{1d} = 460.80 \cdot \frac{0.434}{0.51} = 392.1 \text{ kN}$$

### Nudo 3

Del nudo "3" de la figura EC1.5 se puede determinar  $T_{3d}$  y  $C_{1d}$  (ver figura EC1.6)

$$\frac{T_{3d}}{195.9} = \frac{0.475}{0.434} \Rightarrow T_{3d} = 214.4 \text{ kN}$$

$$C_{1d} = \sqrt{230.3^2 + 195.9^2 + 214.4^2} = 370.7 \text{ kN}$$

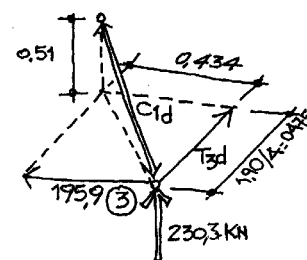


Figura EC1.6

### Nudo 2

Del equilibrio del nudo 2 de la figura EC1.5

Se puede determinar  $T_{2d}$  (ver figura EC1.7)

$$\frac{T_{2d}}{195.9} = \frac{0.475}{0.513} \Rightarrow T_{2d} = 181.4 \text{ kN}$$

$$C_{2d} = \sqrt{194.8^2 + 195.9^2 + 181.4^2} = 330.5 \text{ kN}$$

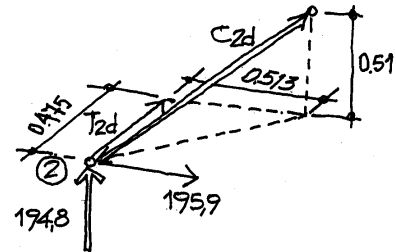


FIGURA EC 1-7

### Nudo 1

Se comprueba el equilibrio (figura EC1.8)

$$2 \cdot \left[ C_{2d} \cdot \frac{0.51}{\sqrt{0.513^2 + 0.475^2 + 0.51^2}} + C_{1d} \cdot \frac{0.51}{\sqrt{0.434^2 + 0.475^2 + 0.51^2}} \right] =$$

$$= 2 \cdot [330.5 \cdot 0.589 + 370.7 \cdot 0.621] = 850 \Rightarrow \text{Cumple}$$

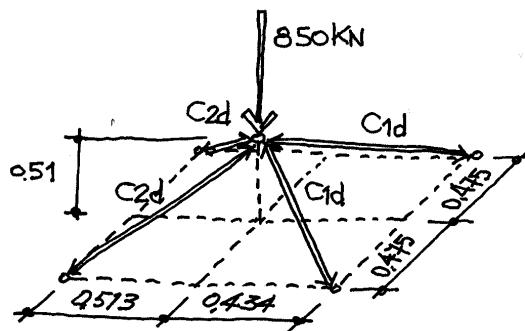


FIGURA EC 1-8

## 3º DISEÑO DE LA ARMADURA

Para controlar de forma indirecta la fisuración se limita la tensión en el acero a  $400 \text{ N/mm}^2 = 40 \text{ kN/cm}^2$

Por tanto  $A_1 = \frac{T_{1d}}{40} = \frac{392.1}{40} = 9.78 \text{ cm}^2$  a disponer en todo el ancho de la zapata, es decir, en 1.90 m.

$$\Rightarrow A_1 = 5.14 \text{ cm}^2/\text{l} \Rightarrow \phi 12 \text{ a } 20 \text{ cm en la dirección longitudinal.}$$

En la dirección transversal:

$$A_2 = \frac{T_{2d}}{40} = \frac{181.4}{40} = 4.535 \text{ en } \frac{1.90}{2} \text{ m} \Rightarrow A_2 = 4.77 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$A_3 = \frac{T_{3d}}{40} = \frac{214.4}{40} = 5.360 \text{ en } \frac{1.90}{2} \text{ m} \Rightarrow A_3 = 5.64 \text{ cm}^2/\text{m} \Rightarrow \phi \text{ 12 a 20 cm en la dirección transversal.}$$

Se dispone como cuantía mínima  $A_s = \frac{1.8}{1000} \cdot 60 \cdot 100 = 10.8 \text{ cm}^2/\text{m} \Rightarrow$  se dispone  $\phi 16$  a 0.20 m

#### 4º COMPROBACIÓN DE NUDOS

Los nudos tipo “2” o “3” de las figuras EC1.4 y EC1.5 son producto de la discretización utilizada, en ellos basta con comprobar que la armadura está anclada

$$l_{bl} = 15 \cdot 1.6^2 = 38.4 \text{ cm} \leq \frac{f_{yk}}{20} \cdot \phi = 40.8 \rightarrow 41 \text{ cm.}$$

Basta con llevar la armadura al final de la zapata

#### Nudo 1

Se puede pasar del “nudo espacial” al “nudo plano” proyectando las fuerzas sobre el eje de simetría. Esto implica que el ancho del nudo coincide con el del pilar: 0.30 m.

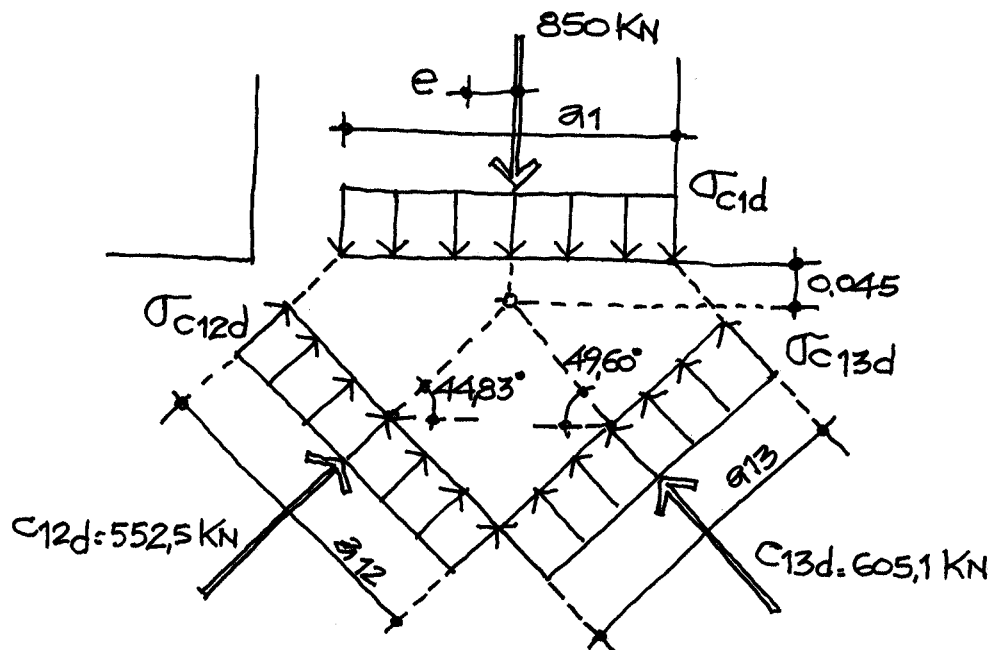


Figura EC1.9

De la figura EC1.9 como  $e = 0.053$

$$a_1 = 2 \left( \frac{0.55}{2} - 0.053 \right) = 0.444 \text{ m}$$

Por geometría

$$a_{12} = 0.444 \sin 44.83 + 0.090 \cdot \cos 44.83 = 0.377 \text{ m}$$

$$a_{13} = 0.444 \sin 49.60^\circ + 0.077 \cos 49.60^\circ = 0.388 \text{ m}$$

Las tensiones se limitan a  $f_{cd} = \frac{25000}{1.50} = 16.666 \text{ kN/m}^2$

$$\sigma_{c1d} = \frac{850}{0.444 \cdot 0.30} = 6381 \text{ kN/m}^2 \leq f_{cd}$$

$$\sigma_{c12d} = \frac{552.5}{0.377 \cdot 0.30} = 4885 \text{ kN/m}^2 \leq f_{cd}$$

$$\sigma_{c13d} = \frac{605.1}{0.388 \cdot 0.30} = 5093 \text{ kN/m}^2 \leq f_{cd}$$

## 5º ARMADO

En la figura EC1.10 se indica la disposición de armadura propuesta. Como se aprecia se han dispuesto patillas a pesar de no ser estrictamente necesarias.

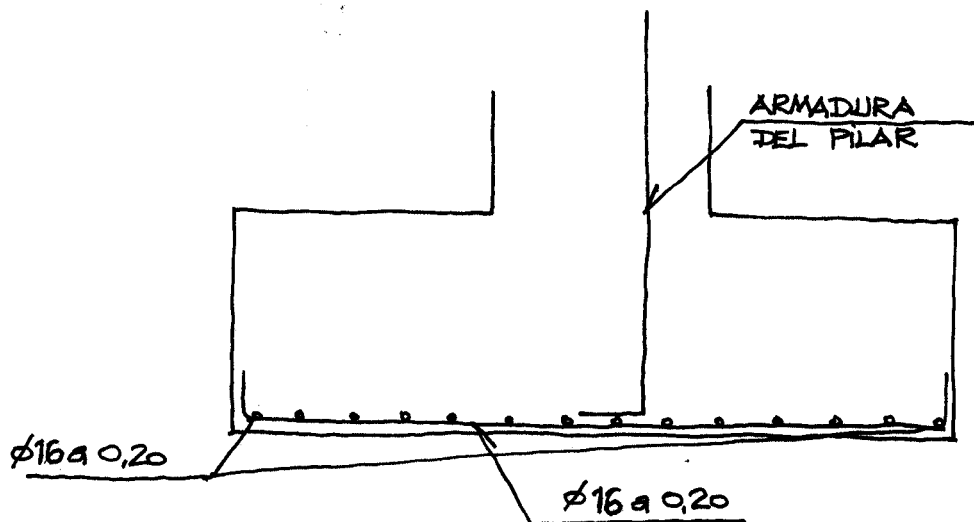


Figura EC1.10

## HIPÓTESIS 2

### 1º PLANTEAMIENTO DEL MECANISMO RESISTENTE

Se calculan en primer lugar las tensiones en el terreno

$$\text{Como } e = \frac{M_d}{N_d} = \frac{200}{500} = 0.40 \text{ m}$$

$$\frac{L}{6} = \frac{1.90}{6} = 0.316 < e \Rightarrow \text{ley de tensiones en el terreno de tipo triangular}$$

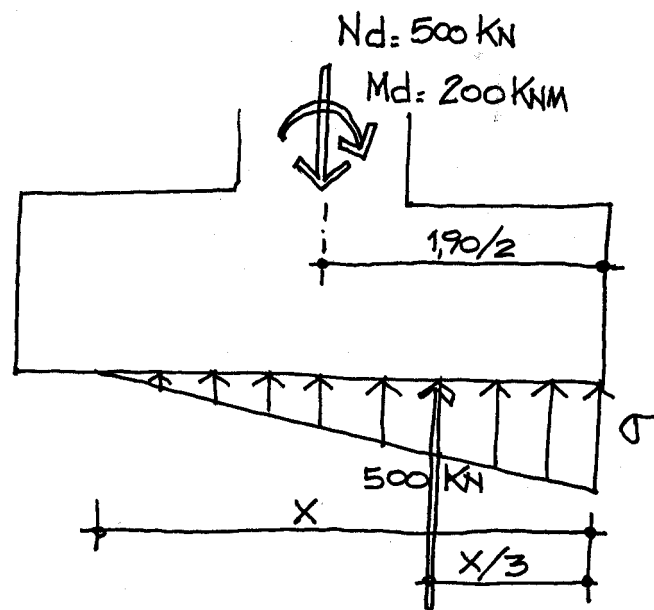


Figura EC1.11

Por equilibrio:

$$e = \frac{200}{500} = \frac{1.90}{2} - \frac{x}{3} \quad x = 1.65 \text{ m}$$
$$\frac{1}{2} \sigma \cdot x \cdot 1.90 = 500 \quad \sigma = 318.98 \text{ kN/m}^2$$

Las acciones que transmite el pilar (axil y momento) se transforman en un par de fuerzas (figura EC1.12)



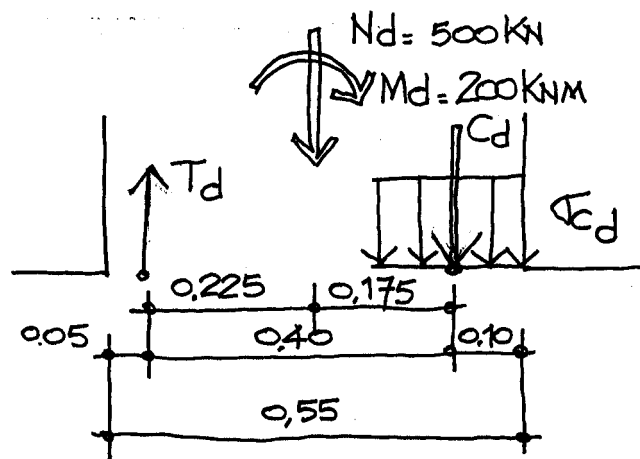


Figura EC1.12

Se tantea con un brazo de 0.40 m

$$T_d \cdot 0.225 + C_d \cdot 0.175 = 200 \text{ kNm}$$

$$C_d - T_d = 500 \text{ kN}$$

Resolviendo:

$$T_d = 281.25 \text{ kN} \quad C_d = 781.25 \text{ kN}$$

Se comprueba la tensión en el hormigón del pilar:

$$\sigma_{cd} = \frac{781.25}{0.20 \cdot 0.30} = 13020.8 \leq 0.85 f_{cd} = 0.85 \frac{25000}{1.50} = 14166 \text{ kN/m}^2$$

$$\text{Armadura necesaria en el pilar } A_s = \frac{281}{40} = 7.03 \text{ cm}^2 \Rightarrow 4\phi 16$$

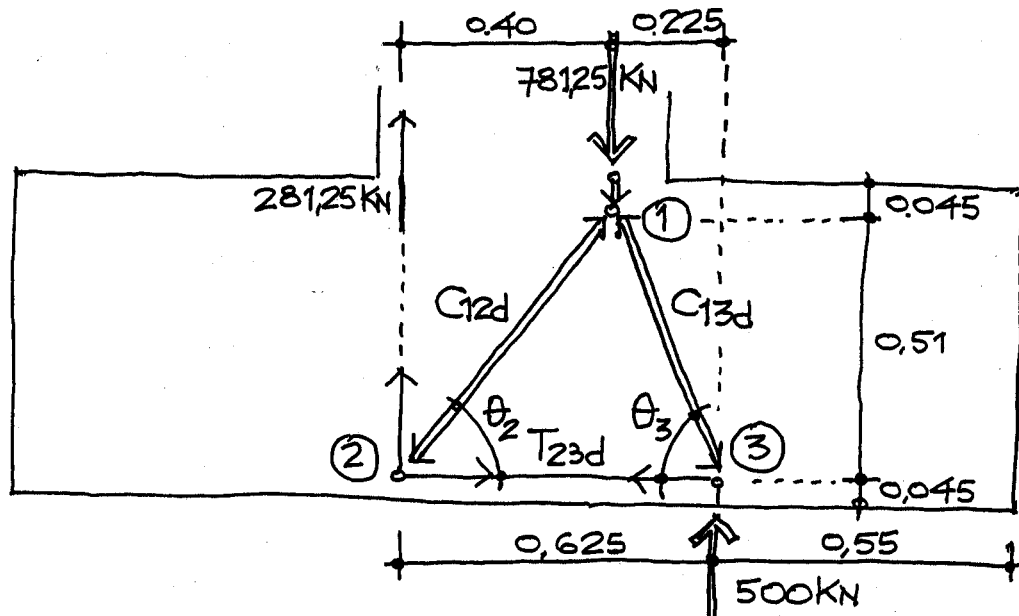


Figura EC1.13

De nuevo, el mecanismo de la figura EC1.13 es la proyección en un plano de mecanismo espacial de la figura EC1.14.

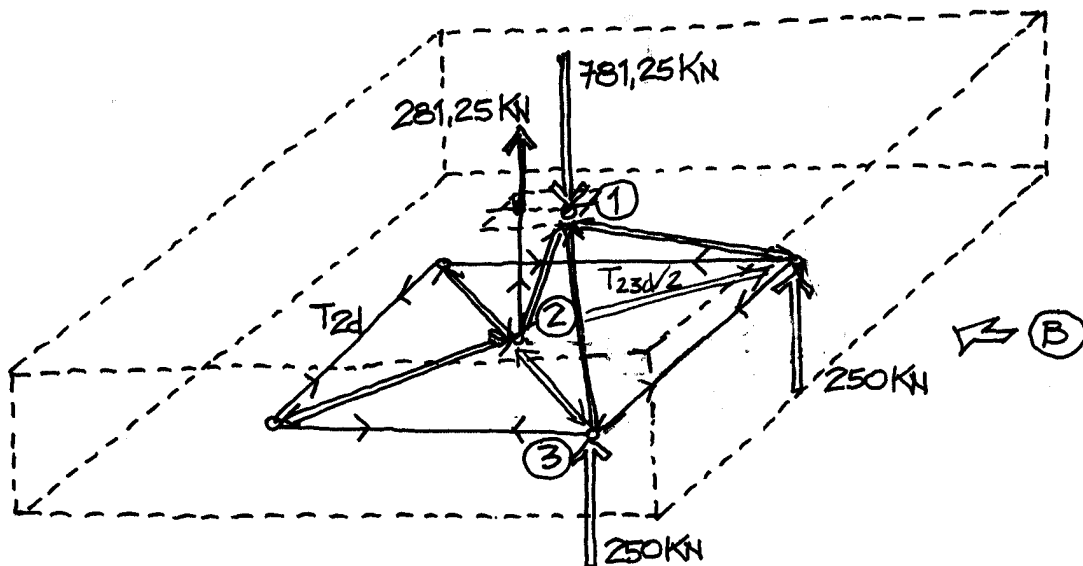


Figura EC1.14

## 2º OBTENCIÓN DE ESFUERZOS Y COMPROBACIÓN DEL EQUILIBRIO

Se trabaja por sencillez con el modelo plano de la figura EC1.13. Con  $\theta_2 = 51.89^\circ$ ,  $\theta_3 = 66.19^\circ$ , que se obtienen por trigonometría en dicha figura.

### Nudo 3

De la figura EC1.15

$$\frac{T_{23d}}{500} = \frac{0.225}{0.51} \Rightarrow T_{23d} = 220.59 \text{ kN}$$

$$C_{13d} = \sqrt{500^2 + 220.59^2} = 546.6 \text{ kN}$$

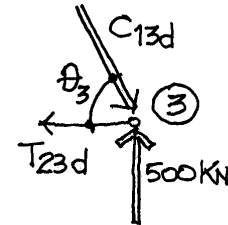


FIGURA EC 1-15

### Nudo 2

De la figura EC1.16

$$C_{12d} = \sqrt{281.25^2 + 220.59^2} = 357.44 \text{ kN}$$

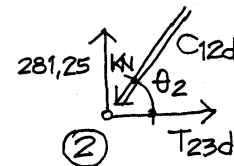


FIGURA EC 1-16

### Nudo 1

Se comprueba el equilibrio (según la figura EC1.17)

$$C_{12d} \cdot \text{sen } \theta_2 + C_{13d} \text{ sen } \theta_3 = 357.44 \text{ sen } 51.89^\circ + 546.5 \text{ sen } 66.19^\circ = 781.25 \text{ Cumple}$$

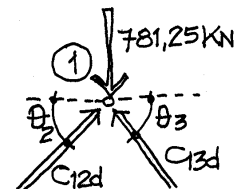


FIGURA EC 1-17

## 3º DISEÑO DE LA ARMADURA

La armadura longitudinal total  $A_{23}$  será:

$$A_{23} = \frac{T_{23d}}{40 \text{ kN/cm}^2} = \frac{220.59}{40} = 5.51 \text{ cm}^2 \Rightarrow \text{cuantía mínima}$$

La armadura transversal se puede dimensionar según el mecanismo de la figura EC1.18, que corresponde a una vista por "B" de la figura EC1.14.

$$T_{3d} = 250 \frac{0.475}{0.51} = 232.8 \text{ kN} \quad A_{s3} = \frac{232.8}{40} = 5.82 \text{ cm}^2 \Rightarrow \text{cuantía mínima}$$

Esta armadura corresponde a la zona de influencia de la reacción de 250 kN  $\rightarrow b = 2 \times 0.55$   
 $= 1.10 \text{ m}$   $A_{s3} \approx \frac{5.82}{1.10} = 5.3 \text{ cm}^2/\text{m}$

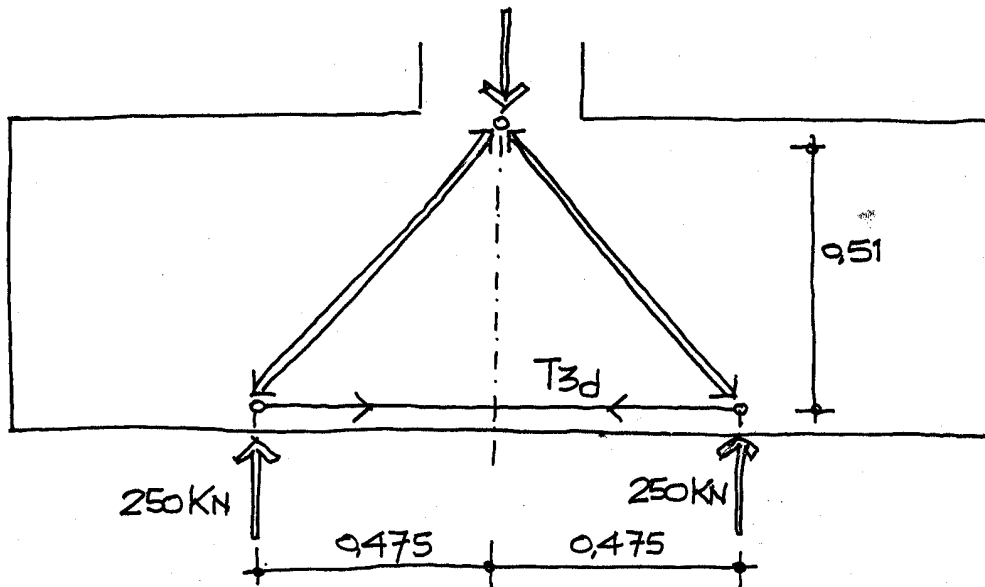
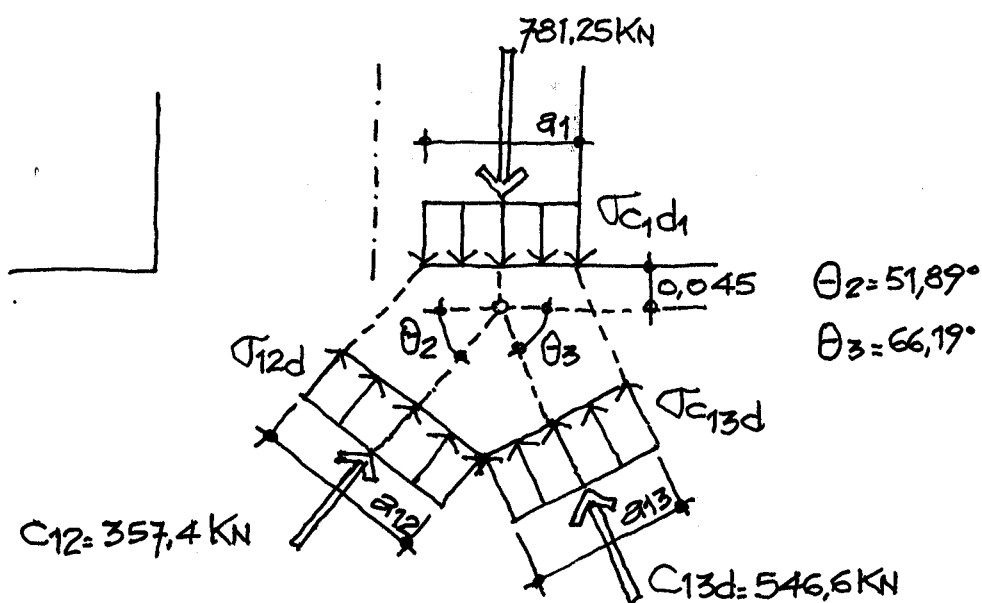


Figura EC1.18

#### 4º COMPROBACIÓN DE NUDOS

Los únicos nudos que son puntos de concentración de tensiones son los denominados "1" y "2" en el modelo espacial de la figura EC1.14.



*Figura EC1.19*

De la figura

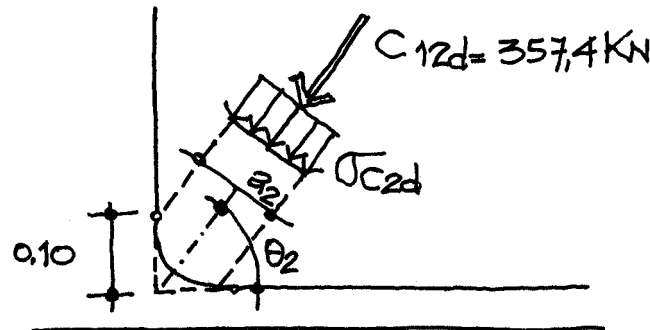
$a_1 = 0.20 \text{ m}$  (figura EC 1–12)  
 $a_{12} = 0.20 \text{ sen } 51.89 + 0.090 \cos 51.89 = 0.21 \text{ m}$   
 $a_{13} = 0.20 \text{ sen } 66.19 + 0.090 \cos 66.19 = 0.22 \text{ m}$

Adoptando como ancho del nudo el ancho del pilar:  $b=0.30$

$$\sigma_{c12} = \frac{357.4}{0.21 \cdot 0.30} = 5673 \text{ KN/m}^2 \leq f_{cd} : \text{cumple}$$

$$\sigma_{c13} = \frac{546.6}{0.22 \cdot 0.30} = 8281 \text{ KN/m}^2 \leq f_{cd} : \text{cumple}$$

### Nudo 2



*Figura EC1.20*

El radio de doblado de la armadura del pilar es:

$$R = 6\phi = 6 \cdot 1.6 = 9.6 \text{ cm} \rightarrow 10 \text{ cm}$$

$$a_2 = 2.0, 10 \cos \theta_2 = 0.123 \text{ m}$$

Por anclarse armadura en el nudo, la tensión de compresión en el hormigón se limita a 0.70

$$f_{cd} \cdot 0.70 \cdot \frac{25000}{1.50} = 11666 \text{ KN/m}^2$$

Adoptando como ancho del nudo el ancho del pilar  $b=0.30 \text{ m}$

$$\sigma_{c2d} = \frac{357.4}{0.123 \cdot 0.30} = 9686 \text{ KN/m}^2 \leq 0.70 f_{cd} : \text{Cumple}$$

### **5º ARMADO**

La armadura del pilar  $4 \varnothing 16$  debe solaparse con la armadura de la zapata.

La armadura necesaria para transmitir  $T_{23d}$  es:

$$A_{s\text{nec}} = \frac{220.59}{40} = 5.51 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{real}} = 4\varnothing 16 = 16.08 \text{ cm}^2$$

Se puede reducir la longitud de solape en la proporción  $5.51 / 16.08 = 0.34$

$l_s = 0.34 (30.6 + 40.8) = 24.3 \text{ cm}$ . Se dispone una patilla en horizontal de 0.25 m.

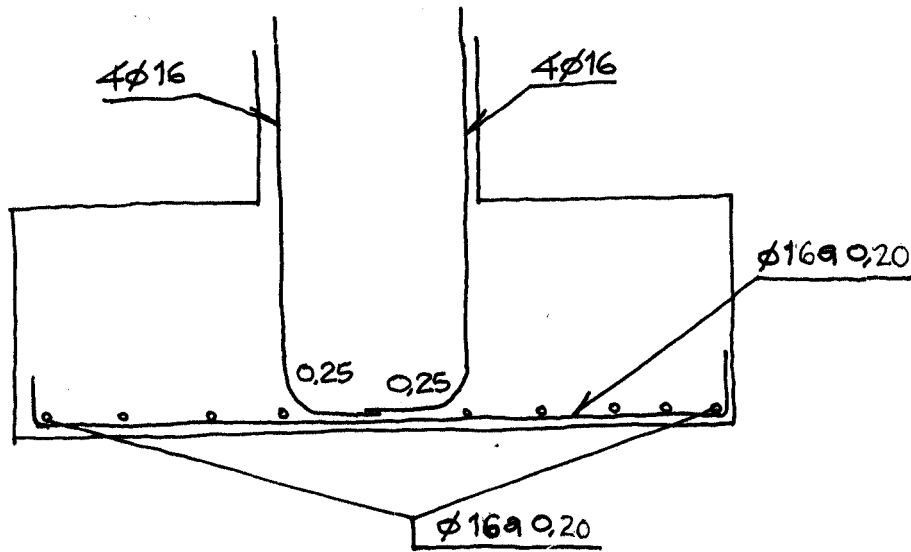


Figura EC1.21

**EC.2. Zapata sometida a flexión esviada**



La zapata aislada de la figura EC2.1 se construye con hormigón H-25 y acero B-500-S. Se supone un control normal, con lo que  $\gamma_c = 1.50$  y  $\gamma_s = 1.15$ . Se desea dimensionar la zapata por el método de bielas y tirantes para las cargas:

$$N_d = 12500 \text{ kN}$$

$$M_{xd} = 4000 \text{ kNm}$$

$$M_{yd} = 10000 \text{ kN}$$

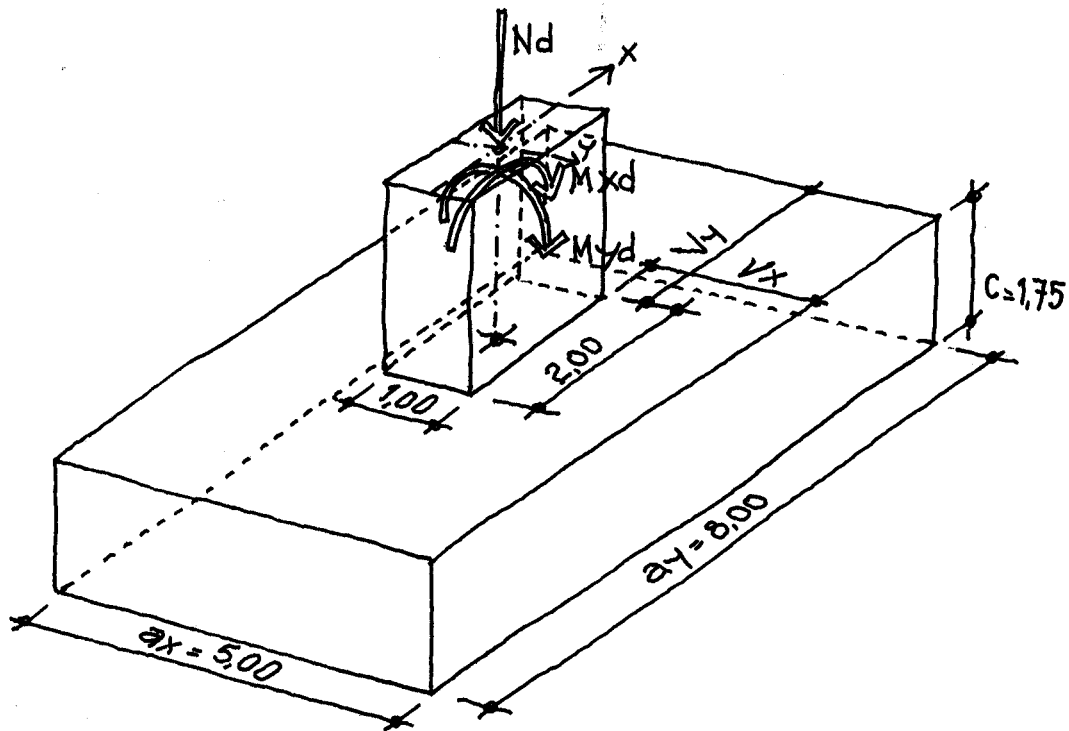


Figura EC2.1

Como el canto es  $C \geq \frac{V_{\max}}{2}$  es de aplicación el método de bielas y tirantes.

### HIPÓTESIS – 1

#### **1º PLANTEAMIENTO DEL MECANISMO RESISTENTE**

Se calculan en primer lugar las tensiones en el terreno.

$$e_x = \frac{4000}{12500} = 0.32 \text{ m} \leq \frac{a_x}{6} = 0.83 \text{ m}$$

$$e_y = \frac{10000}{12500} = 0.80 \text{ m} \leq \frac{a_y}{6} = 1.33 \text{ m}$$

Por tanto todo el terreno bajo la zapata está comprimido por ésta.

Las tensiones se pueden calcular según la expresión

$$\sigma = \frac{N_d}{a_x \cdot a_y} \pm \frac{6 M_{xd}}{a_x^2 \cdot a_y} \pm \frac{6 M_{yd}}{a_x \cdot a_y^2}$$

Con  $N_d = 12500 \text{ kN}$   
 $M_{xd} = 4000 \text{ kNm}$   
 $M_{yd} = 10000 \text{ kNm}$   
 $a_x = 5.00 \text{ m}$   
 $a_y = 8.00 \text{ m}$

Resultan las tensiones indicadas en la figura EC2.2.

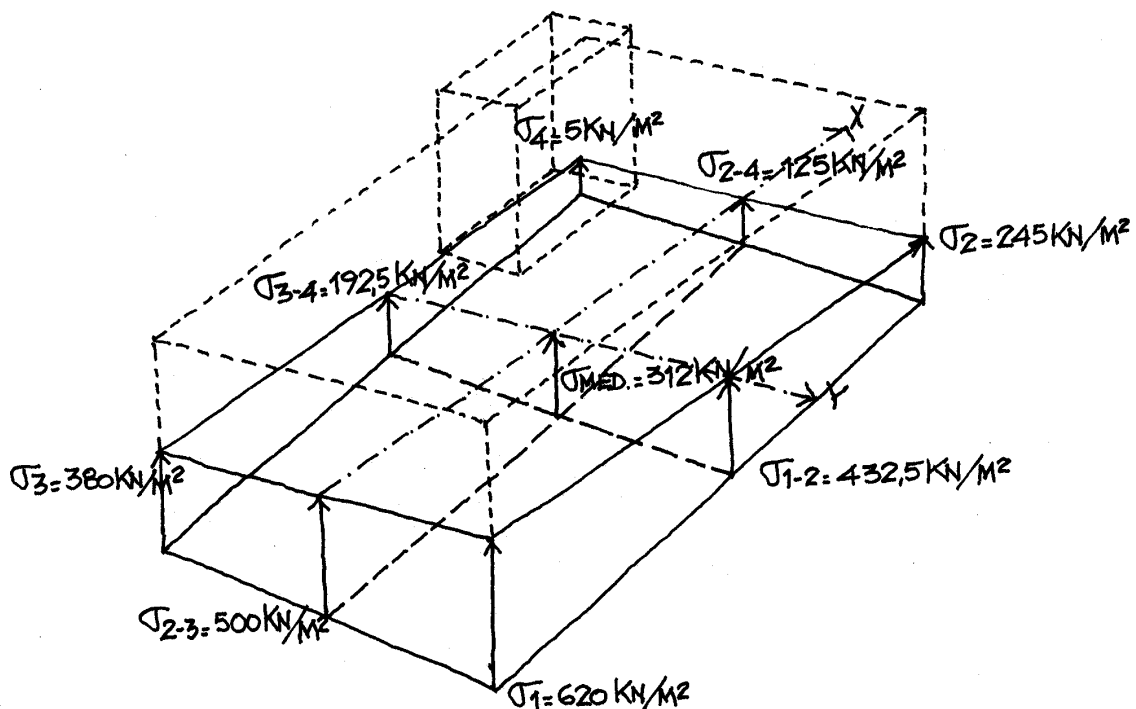


Figura EC2.2

Para calcular las reacciones equivalentes del terreno, se determina el volumen de tensiones (fuerza) correspondiente a cada uno de los cuadrantes de la zapata y la posición de dichas fuerzas equivalentes (figura EC2.3).

$$V_{1d} = \left( \frac{a_x \cdot a_y}{4} \right) \cdot \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_{med}}{2} \right) = 4662.5 \text{ kN}$$

$$V_{2d} = \left( \frac{a_x \cdot a_y}{4} \right) \cdot \left( \frac{\sigma_2 + \sigma_{med}}{2} \right) = 2787.5 \text{ kN}$$

$$V_{3d} = \left( \frac{a_x \cdot a_y}{4} \right) \cdot \left( \frac{\sigma_3 + \sigma_{med}}{2} \right) = 3462.5 \text{ kN}$$

$$V_{4d} = \left( \frac{a_x \cdot a_y}{4} \right) \cdot \left( \frac{\sigma_4 + \sigma_{med}}{2} \right) = 1587.5 \text{ kN}$$

Se comprueba que  $V_{1d} + V_{2d} + V_{3d} + V_{4d} = 12500 \text{ kN}$

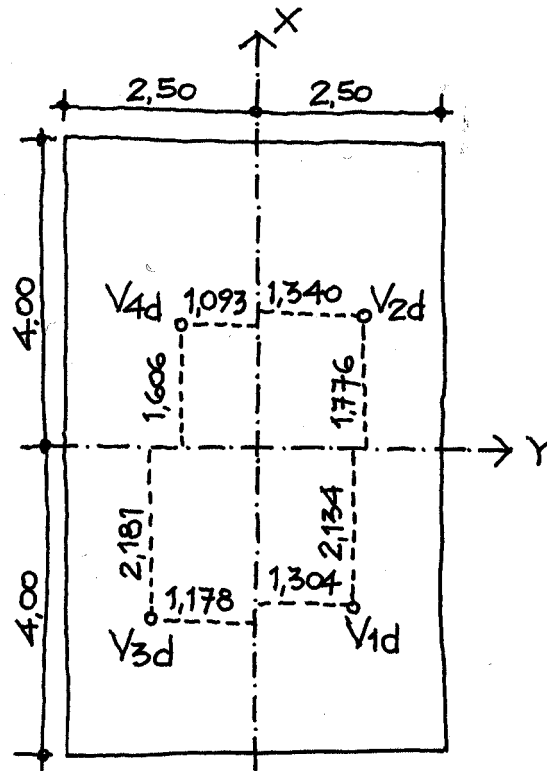


Figura EC2.3

Para que los tirantes del mecanismo resistente sean paralelos a las caras de la zapata, se adoptan unos valores promediados para la situación de las resultantes  $V_{1d}$ ,  $V_{2d}$ ,  $V_{3d}$ ,  $V_{4d}$ , que sigan cumpliendo el equilibrio de momentos (figura EC2.4).

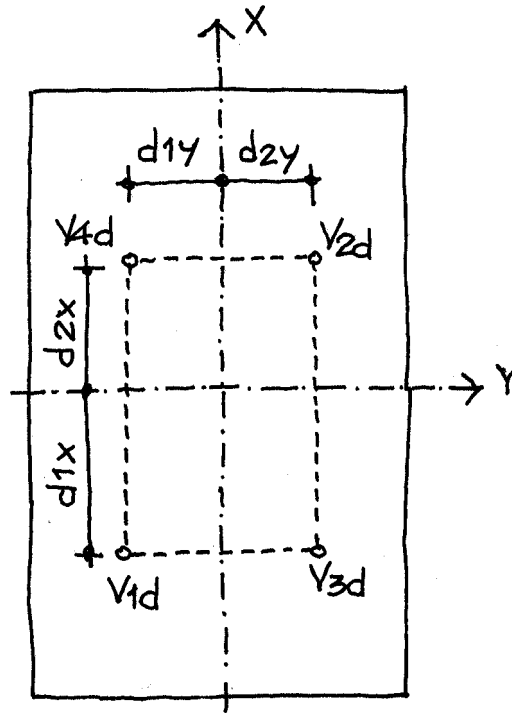


Figura EC2.4

Si se adopta  $d_{2y} = \frac{(1.34 + 1.30)}{2} = 1.32 \text{ m}$   
 $d_{1x} = \frac{(2.18 + 2.13)}{2} = 2.16 \text{ m}$

Para que se cumpla el equilibrio de momentos, los valores de  $d_{1y}$  y  $d_{2x}$  deben cumplir:

$$(V_{1d} + V_{2d}) \cdot 1.32 - (V_{3d} + V_{4d}) d_{1y} = 4000$$

$$(V_{1d} + V_{3d}) \cdot 2.16 - (V_{2d} + V_{4d}) d_{2y} = 10000$$

Resolviendo  $d_{1y} = 1.16 \text{ m}$      $d_{2x} = 1.73 \text{ m}$

Con lo que quedan definidas las reacciones del terreno y su posición como vértices de un rectángulo (figura EC2.4).

El pilar está sometido a la terna de esfuerzos:

$N_d = 12500 \text{ kN}$   
 $M_{xd} = 4000 \text{ kNm}$   
 $M_{yd} = 10000 \text{ kNm}$

Estos esfuerzos tendrán como resultante una compresión  $C_d$  y una tracción  $T_d$  aplicadas en la cara superior de la zapata (figura EC2.5).

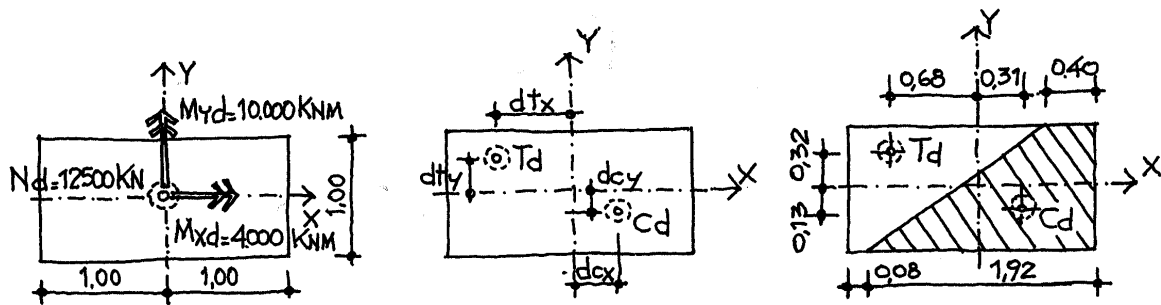


Figura EC2.5.

Las resultantes de compresiones y tracciones  $C_d$  y  $T_d$ , y sus puntos de aplicación de acuerdo con la notación de la figura EC2.5 deberán cumplir por equilibrio las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} C_d - T_d &= 12500 \text{ kN} \\ C_d \cdot d_{cy} + T_d \cdot d_{ty} &= 4000 \text{ kNm} \\ C_d \cdot d_{cx} + T_d \cdot d_{tx} &= 10000 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Del análisis de la sección del pilar suponiendo HA-25, B-500-S y armado con  $\phi 25$  a 0.10 en las cuatro caras, se pueden obtener las resultantes de compresiones y tracciones y su posición en la sección de conexión del pilar con la zapata.

Resultan:

$$\begin{aligned} T_d &= 5300 \text{ kN} & d_{tx} &= 0.68 \text{ m} & d_{ty} &= 0.32 \text{ m} \\ C_d &= 17800 \text{ kN} & d_{cx} &= 0.36 \text{ m} & d_{cy} &= 0.13 \text{ m} \end{aligned}$$

Estos valores cumplen con las ecuaciones indicadas anteriormente.

Conocidas las acciones transmitidas por el pilar, y las resultantes de las tensiones en el terreno, se puede plantear un sistema resistente formado por bielas y tirantes.

En la figura EC2.6 se muestra, en planta, un posible mecanismo que puede representar la transmisión de las cargas desde el pilar al terreno.

En las figuras EC2.7 y EC2.8 se muestra una perspectiva del mecanismo resistente propuesto y una vista lateral del mismo.

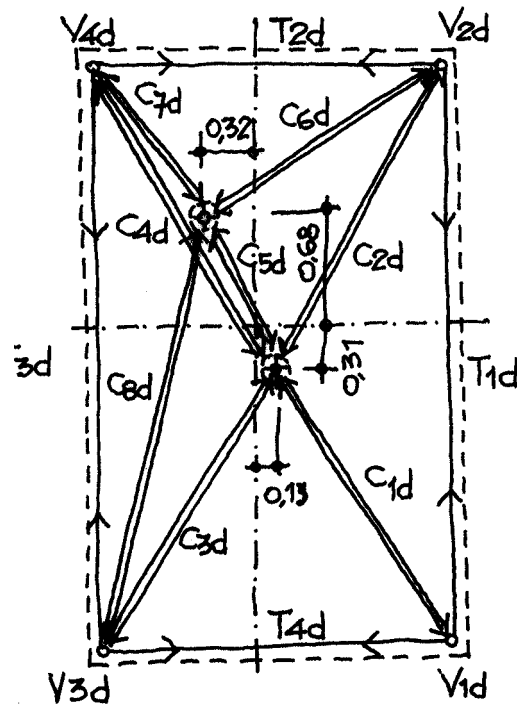


Figura EC2.6

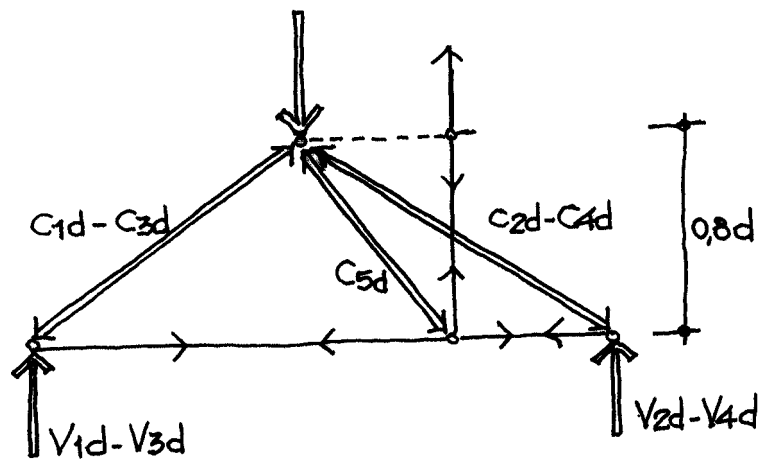


Figura EC2.7

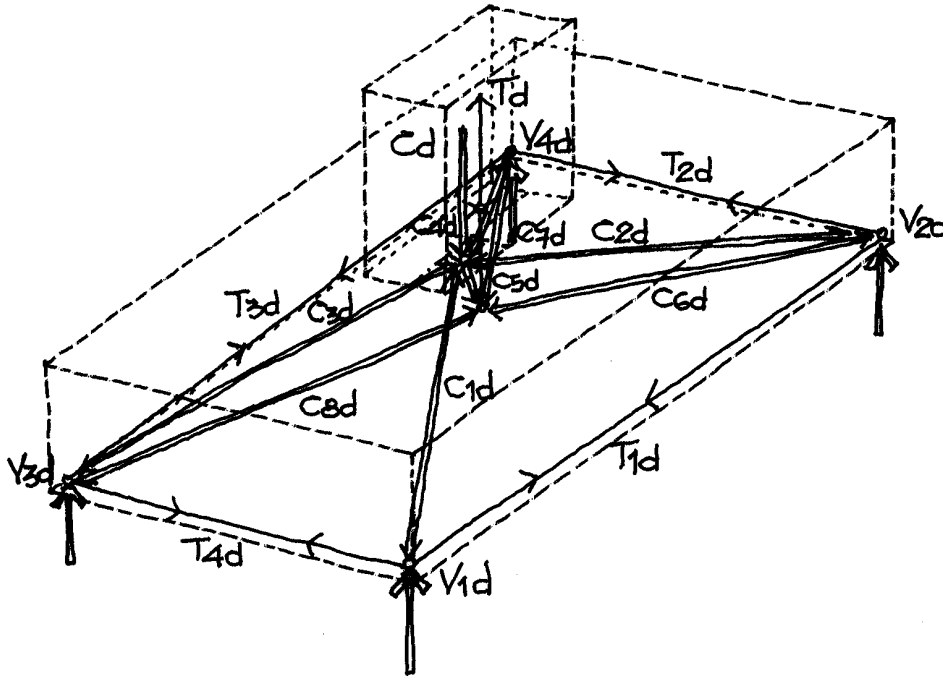


Figura EC2.8

## 2º OBTENCIÓN DE ESFUERZOS Y COMPROBACIÓN DEL EQUILIBRIO

Por tratarse de un sistema resistente de tipo isostático se puede resolver planteando el equilibrio de un nudo y siguiendo con el resto, hasta obtener todos los esfuerzos en el sistema.

También se pueden obtener las fuerzas en bielas y tirantes calculando una estructura equivalente de barras biarticuladas en los nudos.

En el presente ejemplo se ha utilizado este último método, obteniéndose los esfuerzos indicados en la tabla EC2.1.

Long (m)	Tirante/Biela	$\alpha_v (^{\circ})$	$\alpha_m (^{\circ})$	Fuerza [kN]
3.89	T <sub>1d</sub>	0	90	6000
2.48	T <sub>2d</sub>	0	0	5232
3.89	T <sub>3d</sub>	0	90	7083
2.48	T <sub>4d</sub>	0	0	3967
1.40	T <sub>5d</sub>	90	-	5300
2.16	C <sub>1d</sub>	32.95	56.53	8572
2.41	C <sub>2d</sub>	30.15	60.34	5550
2.21	C <sub>3d</sub>	32.30	54.37	6471
2.46	C <sub>4d</sub>	29.44	58.32	3210
1.13	C <sub>5d</sub>	51.09	66.60	6811
	C <sub>6d</sub>	0	32.62	3392
	C <sub>7d</sub>	0	51.34	6030
	C <sub>8d</sub>	0	73.50	2753

Tabla EC2.1

### Comprobación del equilibrio de los nudos

#### Nudo 1

De acuerdo con la notación de la figura EC2.9:

$$\Sigma F_z=0 \quad C_{1d} \cdot \text{sen } \alpha_{v1} - V_{1d} = 8572 \text{ sen } 32.95^\circ - 4662 = 0 \quad \text{cumple}$$

$$\Sigma F_x=0 \quad T_{1d} - C_{1d} \cdot \cos \alpha_{v1} \cdot \text{sen } \alpha_{H1} = 6000 - 8572 \cos 32.95^\circ \text{ sen } 56.53^\circ = 0 \quad \text{cumple}$$

$$\Sigma F_y=0 \quad T_{4d} - C_{1d} \cdot \cos \alpha_{v1} \cdot \cos \alpha_{H1} = 3967 - 8572 \cos 32.95^\circ \cos 56.53^\circ = 0 \quad \text{cumple}$$

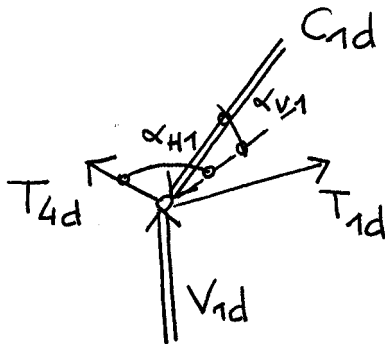


Figura EC2.9

#### Nudo 2

Según la figura EC2.10:

$$\Sigma F_z=0 \quad C_{2d} \cdot \text{sen } \alpha_{v2} - V_{2d} = 5550 \text{ sen } 30.15^\circ - 2788 = 0 \quad \text{cumple}$$

$$\Sigma F_x=0 \quad T_{1d} - C_{2d} \cos \alpha_{v2} \cdot \text{sen } \alpha_{H2} - C_{6d} \text{ sen } \alpha_{H6} = 6000 - 5550 \cos 30.15^\circ \text{ sen } 60.34^\circ - 3392 \cdot \text{sen } 32.62^\circ = 0 \quad \text{cumple}$$

$$\Sigma F_y=0 \quad T_{2d} - C_{2d} \cos \alpha_{v2} \cdot \cos \alpha_{H2} - C_{6d} \cos \alpha_{H6} = 5232 - 5550 \cos 30.15^\circ \cos 60.34^\circ - 3392 \cdot \cos 32.62^\circ = 0 \quad \text{cumple}$$

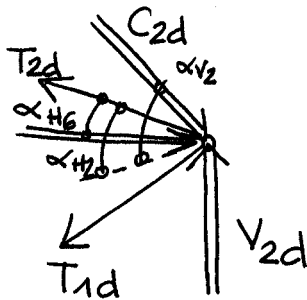


Figura EC2.10



### Nudo 3

De acuerdo con la figura EC2.11:

$$\sum F_z=0 \quad C_{3d} \cdot \text{sen } \alpha_{v3} - V_{3d} = 6471 \cdot \text{sen } 32.30^\circ - 3462 = 0 \quad \text{cumple}$$

$$\sum F_x=0 \quad T_{3d} - C_{3d} \cos \alpha_{v3} \cdot \text{sen } \alpha_{H3} - C_{8d} \text{sen } \alpha_{H8} = 7083 - 6471 \cos 32.3 \text{ sen } 54.37 - 2753 \cdot \text{sen } 73.50^\circ = 0 \quad \text{cumple}$$

$$\sum F_y=0 \quad T_{4d} - C_{3d} \cos \alpha_{v3} \cdot \cos \alpha_{H3} - C_{8d} \cos \alpha_{H8} = 3967 - 6471 \cos 32.3 \cos 54.37 - 2753 \cdot \cos 73.50 = 0 \quad \text{cumple}$$

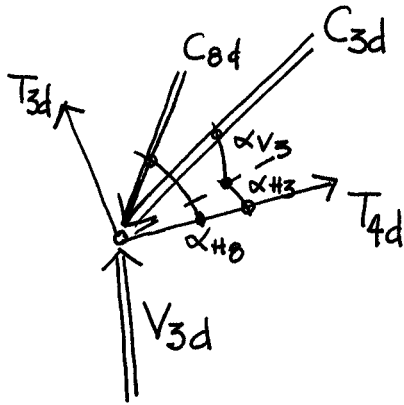


Figura EC2.11

### Nudo 4

De acuerdo con el esquema de la figura EC2.12

$$\sum F_z=0 \quad C_{4d} \cdot \text{sen } \alpha_{v4} - V_{4d} = 3210 \cdot \text{sen } 29.64 - 1588 = 0 \quad \text{cumple}$$

$$\sum F_x=0 \quad T_{3d} - C_{4d} \cos \alpha_{v4} \cdot \text{sen } \alpha_{H4} - C_{7d} \text{sen } \alpha_{H7} = 7083 - 3210 \cos 29.64 \text{ sen } 58.32 - 6030 \cdot \text{sen } 51.37^\circ = 0 \quad \text{cumple}$$

$$\sum F_y=0 \quad T_{2d} - C_{4d} \cos \alpha_{v4} \cdot \cos \alpha_{H4} - C_{7d} \cos \alpha_{H7} = 5232 - 3210 \cos 29.64 \cos 58.32 - 6030 \cdot \cos 51.37 = 0 \quad \text{cumple}$$

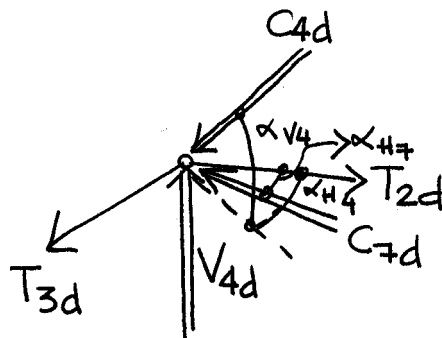


Figura EC2.12

### 3º DISEÑO DE LA ARMADURA

Se limita la tensión en la armadura a  $f_{yd}=400$  MPa

La armadura según la dirección x corresponderá al tirante pésimo en esa dirección.

$$T_{xd} = T_{3d} = 7083 \text{ kN}$$

$$A_{sx}^i = \frac{T_{xd}}{f_{yd}} = \frac{7083}{40} = 177 \text{ cm}^2 \text{ en } 2.50 \text{ m}$$

(ancho de influencia del tirante  $T_{3d}$ )

$$A_{sx}^i = \frac{177}{2.50} = 70.83 \text{ cm}^2 / \text{ml} \cdot \cong \phi 32 \text{ a } 0.15\text{m} + \phi 20 \text{ a } 0.15\text{m}$$

En dirección y

$$T_{yd} = T_{2d} = 5232 \text{ kN}$$

$$A_{sy}^i = \frac{T_{yd}}{f_{yd}} = \frac{5232}{40} = 131 \text{ cm}^2 \text{ en } 4.00 \text{ m}$$

$$A_{sy}^i = \frac{131}{4.0} = 32.7 \Rightarrow \phi 25 \text{ a } 0.15\text{m}$$

Cuantías mínimas:

$$A_{sy}^i + A_{sy}^s \geq 1.8 \cdot 10^{-3} \cdot 800 \cdot 175 = 252 \text{ cm}^2$$

$$A_{sx}^i + A_{sx}^s \geq 1.8 \cdot 10^{-3} \cdot 500 \cdot 175 = 158 \text{ cm}^2$$

Las armaduras de los tirantes deben estar ancladas desde el punto de aplicación de las reacciones del terreno, debiendo prolongarse como mínimo hasta la cara de la zapata.

En la dirección x, la distancia mínima entre el punto de aplicación de la reacción del terreno y el borde más próximo de la zapata es:

$$L_x = 4.00 - 2.16 = 1.84 \text{ m (ver figura EC2.4)}$$

Con acero B-500S y hormigón HA-25,

$l_{bl} = 15 \cdot 3.2^2 = 1.53 \text{ m} < L_x$ : bastaría con llevar la armadura al borde de la zapata, del lado de la seguridad se prolonga hasta éste y se sube por la cara lateral, tal y como es habitual en zapatas de estas dimensiones.

En la dirección y

$$L_y = 2.50 - 1.32 = 1.18 \text{ m}$$

$L_{bl} = 15 \cdot 2.5^2 = 0.94 \text{ m} < L_y$  : se adopta el mismo criterio que en la dirección x. (ver figura EC2.4).

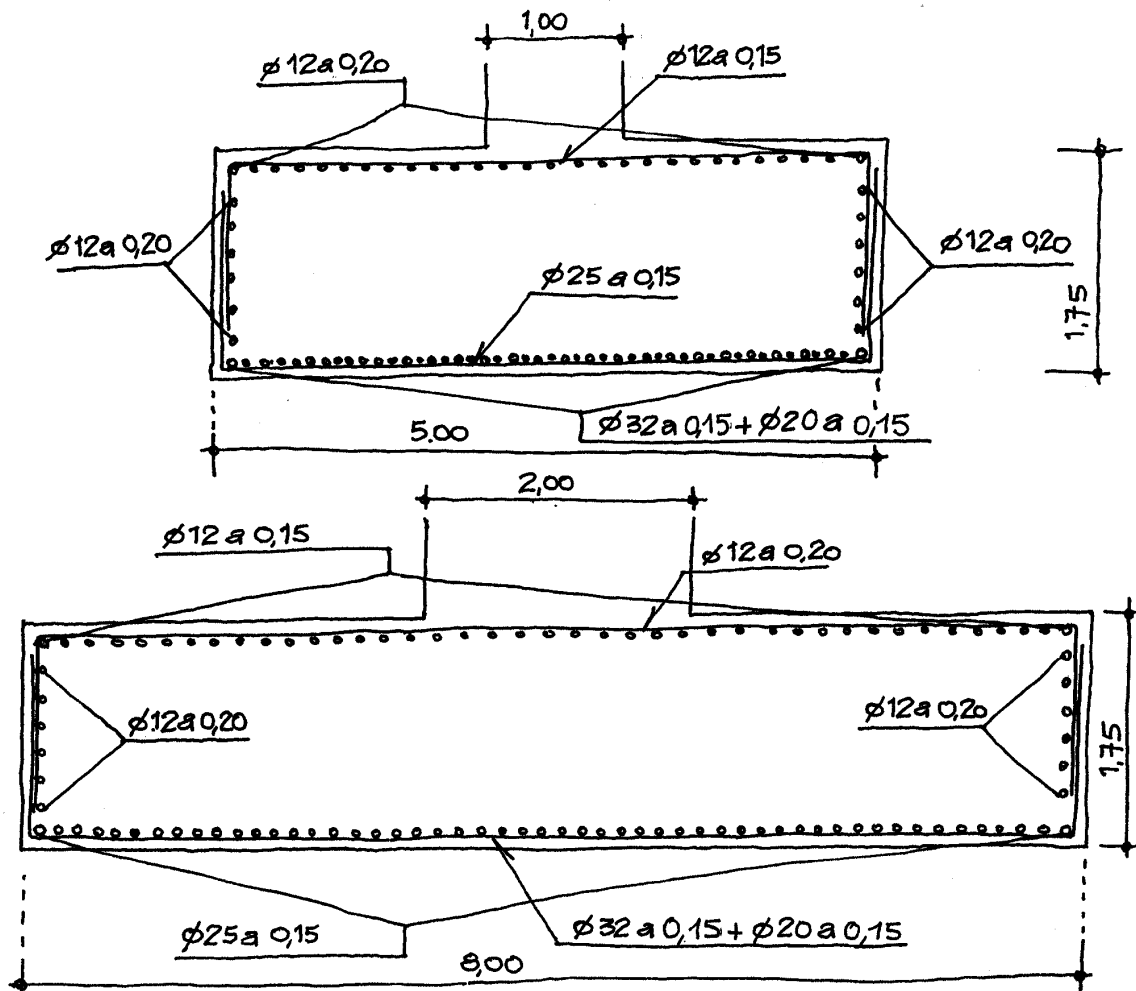


Figura EC2.13

#### 4º COMPROBACIÓN DE NUDOS

El único nudo real que existe es el situado en el contacto entre pilar y zapata.

La biela más cargada que acomete a él es la  $C_{1d} = 8572 \text{ kN}$ . Por tratarse de un nudo multicomprimido, y ya que el ángulo de la biela con la horizontal es superior a  $30^\circ$ , el nivel de compresiones en el nudo será muy inferior a  $3.3 f_{cd}$ .

**EC.3. Encepado de 6 pilotes**

Sea el encepado de 6 pilotes circulares de diámetro 1.00 m de la figura EC3.1, que forma parte de la cimentación de una pila de puente.

En la construcción de este elemento se emplea hormigón HA-30 y acero B500S con control intenso de ejecución, luego  $\gamma_c=1.50$  y  $\gamma_s=1.15$ .

Se estudian dos posibles hipótesis de cálculo para este elemento estructural:

- En la primera de ellas, las cargas transmitidas al encepado por la pila generan en esta última un estado tensional en el cual la totalidad de su sección se encuentra comprimida.
- En la segunda, las cargas transmitidas al encepado por la pila generan en esta última un estado tensional en el cual parte de la sección de la misma se encuentra comprimida, estando traccionado el resto.

Los esfuerzos de cálculo correspondientes son  $N_{1d}=11000$  kN,  $M_{1d,long}=1000$  kNm y  $M_{1d,trans}=1200$  kNm, para la primera de las hipótesis de cálculo y  $N_{2d}=11000$  kN,  $M_{2d,long}=2000$  kNm y  $M_{2d,trans}=3000$  kNm para la segunda. Se desea dimensionar la armadura y comprobar el encepado por el método de bielas y tirantes.



## 1º. PLANTEAMIENTO DEL MECANISMO RESISTENTE

Conocidas las cargas mayoradas:

$$\begin{array}{lll} N_{1d} = 11000 \text{ kN}; & M_{1d,long} = 1000 \text{ kNm}; & M_{1d,trans} = 1200 \text{ kNm} \\ N_{2d} = 11000 \text{ kN}; & M_{2d,long} = 2000 \text{ kNm}; & M_{2d,trans} = 3000 \text{ kNm} \end{array}$$

se calculan los esfuerzos en la frontera a través del reparto resultante de la consideración del encepado como sólido rígido. De esta forma la carga vertical en cada pilote se obtiene como:

$$V_i = \frac{N}{n} \pm \frac{M_{l,i} \cdot x_i}{\sum x_i^2} \pm \frac{M_{t,i} \cdot y_i}{\sum y_i^2}$$

Los resultados que se obtienen son:

$$\begin{array}{ll} V_{1d} = 1622.22 \text{ kN} \\ V_{2d} = 1844.44 \text{ kN} \\ V_{3d} = 1722.22 \text{ kN} & \text{(HIPÓTESIS N°1)} \\ V_{4d} = 1944.44 \text{ kN} \\ V_{5d} = 1822.22 \text{ kN} \\ V_{6d} = 2044.44 \text{ kN} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} V_{1d} = 1361.11 \text{ kN} \\ V_{2d} = 1805.56 \text{ kN} \\ V_{3d} = 1611.11 \text{ kN} & \text{(HIPÓTESIS N°2)} \\ V_{4d} = 2055.56 \text{ kN} \\ V_{5d} = 1861.11 \text{ kN} \\ V_{6d} = 2305.56 \text{ kN} \end{array}$$

Para el planteamiento del mecanismo es necesario conocer la posición de la resultante de la terna de esfuerzos transmitida por la pila del puente al encepado. Estas posiciones se muestran en la figura EC3.2.

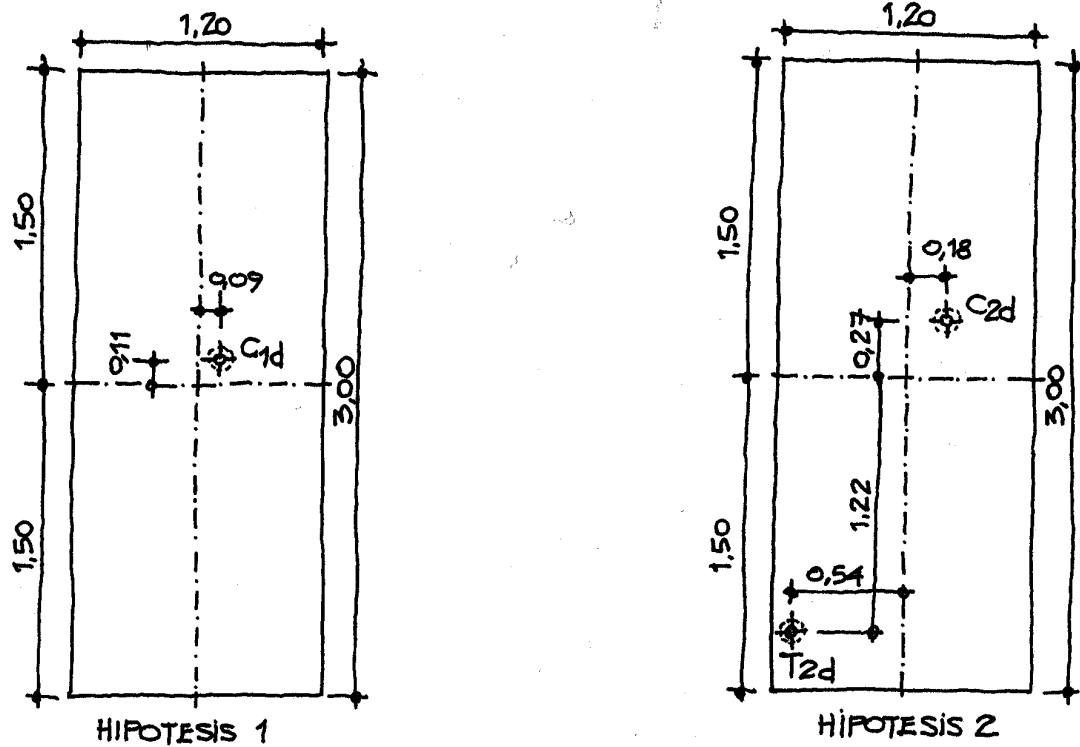


Figura EC3.2

Los valores de estas resultantes y su posición se pueden determinar del estudio de la sección de la pila, resultando (ver figura EC3.2):

$$C_{1d} = 11000 \text{ kN} \quad (\text{HIPÓTESIS N}^\circ 1)$$

$$C_{2d} = 11027.1 \text{ kN} \quad (\text{HIPÓTESIS N}^\circ 2)$$

$$T_{2d} = -27.1 \text{ kN}$$

Dos posibles mecanismos resistentes (uno para cada una de las hipótesis adoptadas) son los indicados en las figuras EC3.3 y EC3.4.



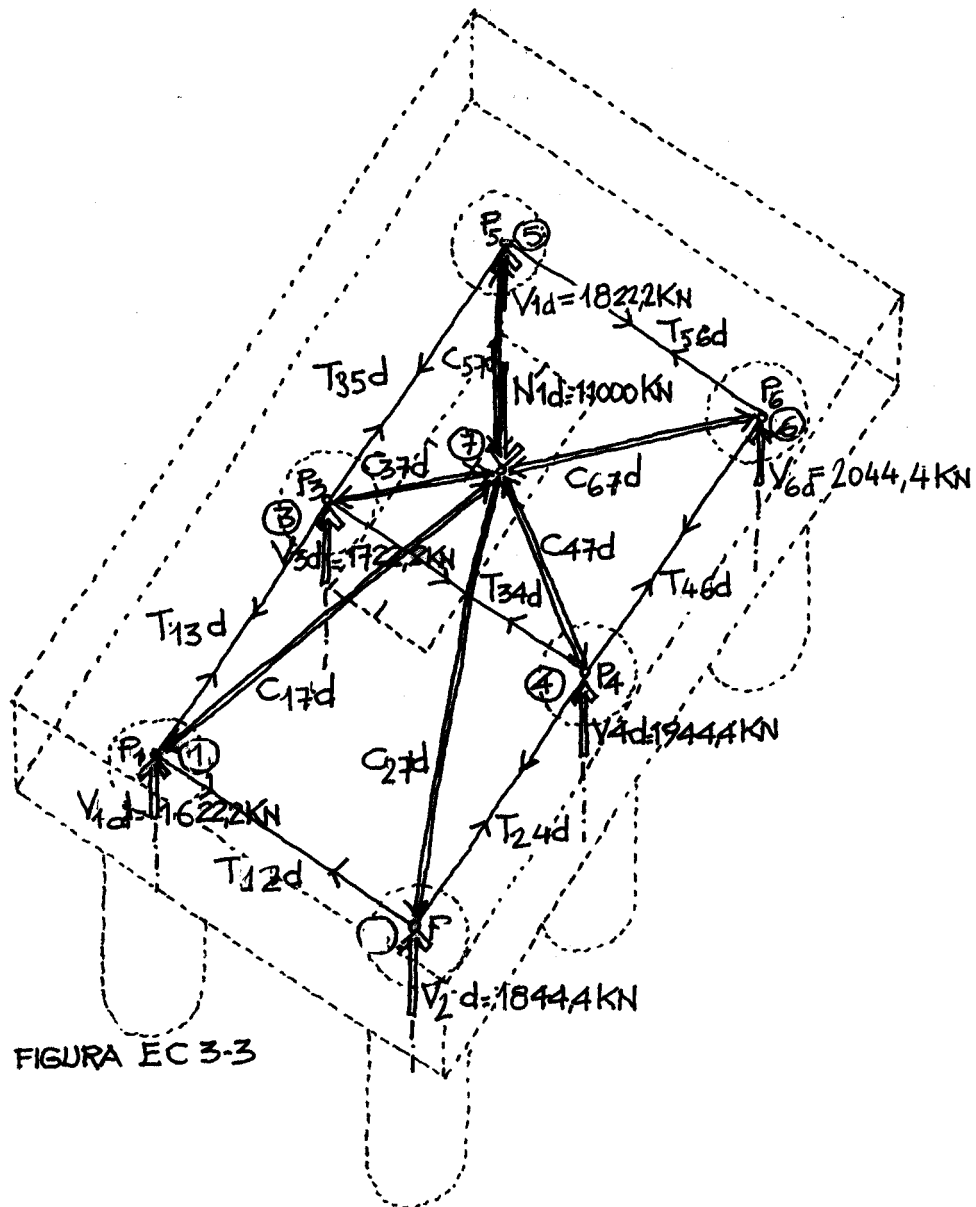


Figura EC3.3

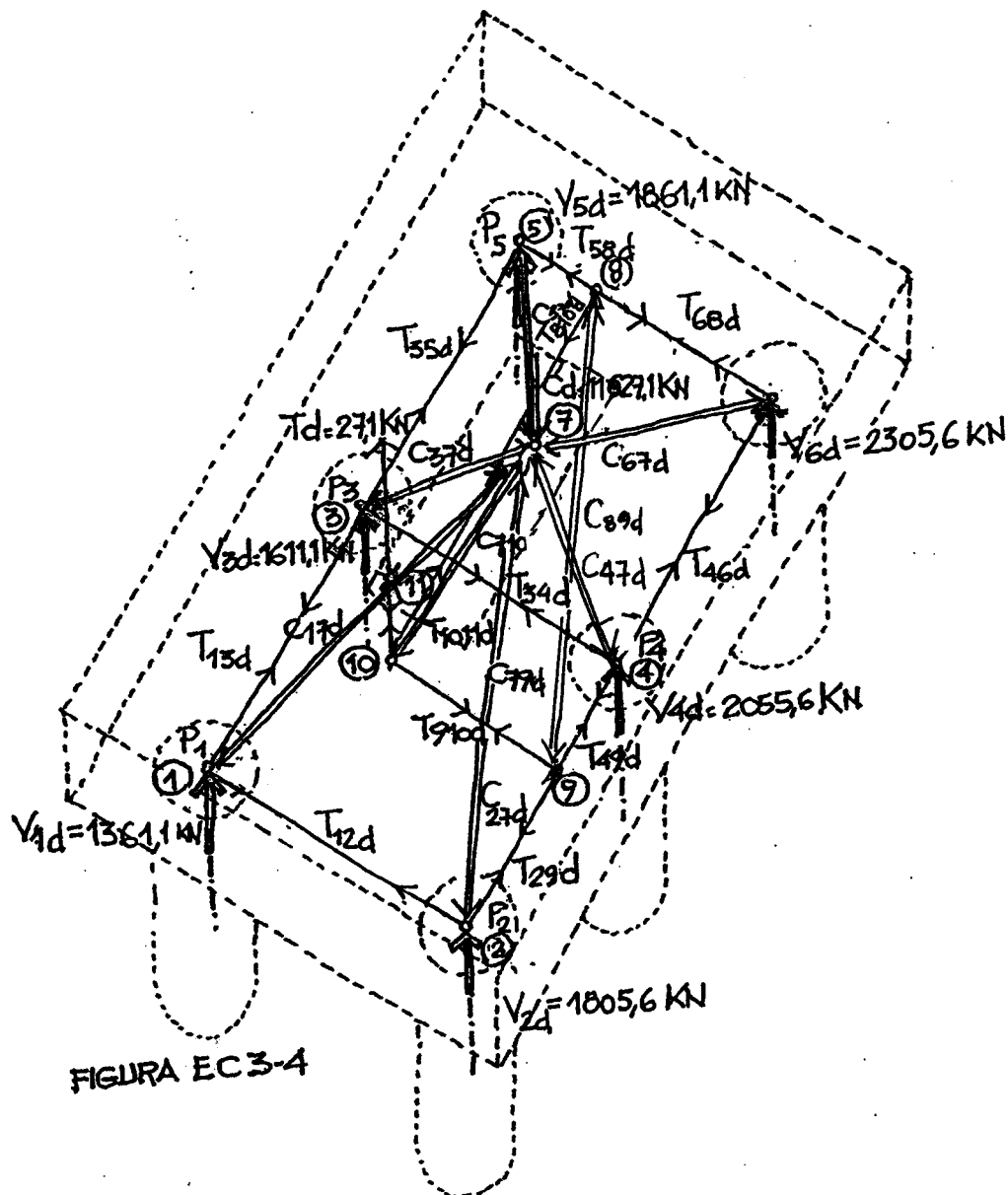


Figura EC3.4

Se puede observar que, en orden a una mayor facilidad constructiva, la armadura (tirantes) se ha dispuesto según las dos direcciones habituales (coincidentes con la dirección de las caras del encepado).

## 2º. OBTENCIÓN DE ESFUERZOS Y COMPROBACIÓN DEL EQUILIBRIO

### HIPÓTESIS N°1

Como datos preliminares básicos se precisa la obtener los ángulos que cada uno de los elementos (bielas y tirantes) forma con su proyección sobre un plano horizontal XY (ángulo  $\alpha_{v,i}$ ) y el que forma con su proyección sobre el plano vertical XZ (ángulo  $\alpha_{H,i}$ ). En la siguiente tabla se resumen estos valores:

Denominación	Elemento estructural	Ángulo $\alpha_{v,i}$ (°)	Ángulo $\alpha_{H,i}$ (°)
C <sub>17d</sub>	BIELA	25.39	62.90
C <sub>27d</sub>	BIELA	25.90	65.62
C <sub>37d</sub>	BIELA	46.11	3.92
C <sub>47d</sub>	BIELA	49.55	4.43
C <sub>57d</sub>	BIELA	26.67	61.18
C <sub>67d</sub>	BIELA	27.27	64.01
T <sub>12d</sub>	TIRANTE	0.00	0.00
T <sub>24d</sub>	TIRANTE	0.00	90.00
T <sub>46d</sub>	TIRANTE	0.00	90.00
T <sub>56d</sub>	TIRANTE	0.00	0.00
T <sub>35d</sub>	TIRANTE	0.00	90.00
T <sub>13d</sub>	TIRANTE	0.00	90.0
T <sub>34d</sub>	TIRANTE	0.00	0.00

### Nudo 1

Por equilibrio (ver figura EC3.5)

$$C_{17d} = \frac{Q_{1d}}{\sin \alpha_{v17}} = \frac{1622.2}{\sin 25.39} = 3783.2 \text{ kN}$$

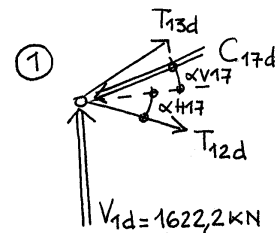


FIGURA EC 3-5

$$T_{12d} = (C_{17d} \cdot \cos \alpha_{v17}) \cdot \cos \alpha_{H17} = 3783.2 \cdot \cos 25.39 \cdot \cos 62.90 = 1556.9 \text{ kN}$$

$$T_{13d} = (C_{17d} \cdot \cos \alpha_{v17}) \cdot \sin \alpha_{H17} = 3783.2 \cdot \cos 25.39 \cdot \sin 62.90 = 3042.6 \text{ kN}$$

### Nudo 2

Por equilibrio (figura EC3.6)

$$C_{27d} = \frac{Q_{2d}}{\sin \alpha_{v27}} = \frac{1844.4}{\sin 25.90} = 4222.6 \text{ kN}$$

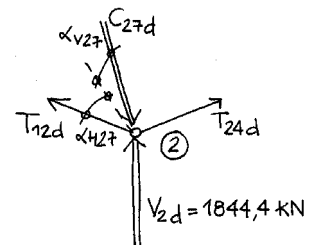


FIGURA EC 3-6

$$T_{24d} = (C_{27d} \cdot \cos \alpha_{v27}) \cdot \sin \alpha_{H27} = 4222.6 \cdot \cos 25.90 \cdot \sin 65.62 = 3459.8 \text{ kN}$$

### Nudo 3

Por equilibrio (figura EC3.7)

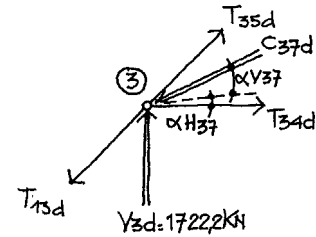


FIGURA EC 3-7

$$C_{37d} = \frac{Q_{3d}}{\sin \alpha_{V37}} = \frac{1722.2}{\sin 46.11} = 2389.9 \text{ kN}$$

$$T_{34d} = (C_{37d} \cdot \cos \alpha_{V37}) \cdot \cos \alpha_{H37} = 2389.9 \cdot \cos 46.11 \cdot \cos 3.92 = 1653.0 \text{ kN}$$

### Nudo 4

Por equilibrio (figura EC3.8)

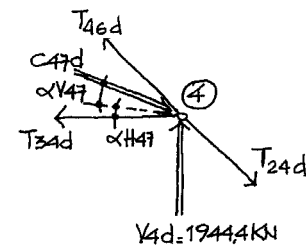


FIGURA EC 3-8

$$C_{47d} = \frac{Q_{4d}}{\sin \alpha_{V47}} = \frac{1944.4}{\sin 49.55} = 2555.3 \text{ kN}$$

### Nudo 5

Por equilibrio (figura EC3.9)

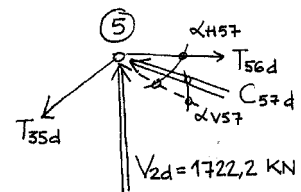


FIGURA EC 3-9

$$C_{57d} = \frac{Q_{5d}}{\sin \alpha_{V57}} = \frac{1822.2}{\sin 26.67} = 4059.62 \text{ kN}$$

$$T_{56d} = (C_{57d} \cdot \cos \alpha_{V57}) \cdot \cos \alpha_{H57} = 4059.6 \cdot \cos 26.67 \cdot \cos 61.18 = 1749.0 \text{ kN}$$

$$T_{35d} = (C_{57d} \cdot \cos \alpha_{V57}) \cdot \sin \alpha_{H57} = 4059.6 \cdot \cos 26.67 \cdot \sin 61.18 = 3178.2 \text{ kN}$$

### Nudo 6

Por equilibrio (figura EC3.10)

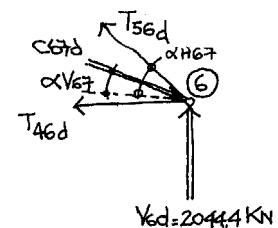


FIGURA EC 3-10

$$C_{67d} = \frac{Q_{6d}}{\sin \alpha_{V67}} = \frac{2044.4}{\sin 27.26} = 4462.7 \text{ kN}$$

$$T_{46d} = (C_{67d} \cdot \cos \alpha_{v67}) \cdot \sin \alpha_{H67} = 4462.7 \cdot \cos 27.26 \cdot \sin 64.01 = 3565.8 \text{ kN}$$

Comprobación del equilibrio en nudos comprimidos inferiores:

$$\begin{aligned} \sum F_x = & (C_{17d} \cdot \cos \alpha_{17v} \cdot \cos \alpha_{17H}) - (C_{27d} \cdot \cos \alpha_{27v} \cdot \cos \alpha_{27H}) + (C_{37d} \cdot \cos \alpha_{37v} \cdot \cos \alpha_{37H}) - \\ & - (C_{47d} \cdot \cos \alpha_{47v} \cdot \cos \alpha_{47H}) + (C_{57d} \cdot \cos \alpha_{57v} \cdot \cos \alpha_{57H}) - (C_{67d} \cdot \cos \alpha_{67v} \cdot \cos \alpha_{67H}) = 383.2 \cdot \\ & \cos 25.39 \cdot \cos 62.90 - 4222.6 \cdot \cos 25.90 \cdot \cos 65.62 + 2389.9 \cdot \cos 46.11 \cdot \cos 3.92 - 2555.3 \cdot \\ & \cos 49.55 \cdot \cos 4.43 + 4059.62 \cdot \cos 26.67 \cdot \cos 61.18 - 4462.7 \cdot \cos 27.26 \cdot \cos 64.01 \approx 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_y = & (C_{17d} \cdot \cos \alpha_{17v} \cdot \sin \alpha_{17H}) + (C_{27d} \cdot \cos \alpha_{27v} \cdot \sin \alpha_{27H}) + (C_{37d} \cdot \cos \alpha_{37v} \cdot \sin \alpha_{37H}) + \\ & + (C_{47d} \cdot \cos \alpha_{47v} \cdot \sin \alpha_{47H}) - (C_{57d} \cdot \cos \alpha_{57v} \cdot \sin \alpha_{57H}) - (C_{67d} \cdot \cos \alpha_{67v} \cdot \sin \alpha_{67H}) = \\ & = 3783.2 \cdot \cos 25.39 \cdot \sin 62.90 + 4222.6 \cdot \cos 25.90 \cdot \sin 65.62 + 2389.9 \cdot \cos 46.11 \cdot \\ & \sin 3.92 + 2555.3 \cdot \cos 49.55 \cdot \sin 4.43 - 4059.62 \cdot \cos 26.67 \cdot \sin 61.18 - 4462.7 \cdot \cos 27.26 \cdot \\ & \sin 64.01 \approx 0 \end{aligned}$$

Comprobación del equilibrio en nudo comprimido superior

$$\begin{aligned} \sum F_z = & (C_{17d} \cdot \sin \alpha_{17v}) + (C_{27d} \cdot \sin \alpha_{27v}) + (C_{37d} \cdot \sin \alpha_{37v}) + (C_{47d} \cdot \sin \alpha_{47v}) + (C_{57d} \cdot \sin \alpha_{57v}) + \\ & + (C_{67d} \cdot \sin \alpha_{67v}) = 3783.2 \cdot \sin 25.39 + 4222.6 \cdot \sin 25.90 + 2389.9 \cdot \sin 46.11 + 2555.3 \cdot \\ & \sin 49.55 + 4059.6 \cdot \sin 26.67 + 4462.7 \cdot \sin 27.26 \approx 11000 \text{ kN} \end{aligned}$$

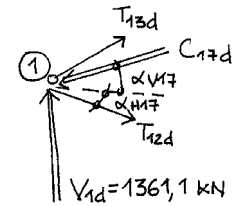
## HIPÓTESIS N°2

Los valores de los ángulos  $\alpha_{v,i}$  y  $\alpha_{H,i}$  son los siguientes:

Denominación	Elemento estructural	Ángulo $\alpha_{v,i}$ (°)	Ángulo $\alpha_{H,i}$ (°)
C <sub>17d</sub>	BIELA	24.27	62.80
C <sub>27d</sub>	BIELA	25.18	68.01
C <sub>37d</sub>	BIELA	44.25	9.10
C <sub>47d</sub>	BIELA	50.90	11.52
C <sub>57d</sub>	BIELA	27.34	58.40
C <sub>67d</sub>	BIELA	28.65	64.20
T <sub>29d</sub>	TIRANTE	0.00	90.00
T <sub>49d</sub>	TIRANTE	0.00	90.00
T <sub>46d</sub>	TIRANTE	0.00	90.00
T <sub>68d</sub>	TIRANTE	0.00	0.00
T <sub>58d</sub>	TIRANTE	0.00	0.00
T <sub>35d</sub>	TIRANTE	0.00	90.00
T <sub>13d</sub>	TIRANTE	0.00	90.00
T <sub>12d</sub>	TIRANTE	0.00	0.00
T <sub>34d</sub>	TIRANTE	0.00	0.00
T <sub>9,10d</sub>	TIRANTE	0.00	0.00
T <sub>8,10d</sub>	TIRANTE	0.00	90.00
C <sub>89d</sub>	BIELA	0.00	64.23
C <sub>7,10d</sub>	BIELA	45.15	64.27
T <sub>10,11d</sub>	TIRANTE	90.00	-

### Nudo 1

Por equilibrio (ver figura EC3.11)



$$C_{17d} = \frac{Q_{1d}}{\sin \alpha_{v17}} = \frac{1361.1}{\sin 24.27} = 3310.9 \text{ kN}$$

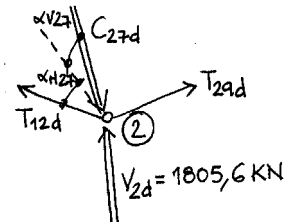
FIGURA EC 3-11

$$T_{12d} = (C_{17d} \cdot \cos \alpha_{v17}) \cdot \cos \alpha_{H17} = 3310.9 \cdot \cos 24.27 \cdot \cos 62.80 = 1379.6 \text{ kN}$$

$$T_{13d} = (C_{17d} \cdot \cos \alpha_{v17}) \cdot \sin \alpha_{H17} = 3310.9 \cdot \cos 24.27 \cdot \sin 62.80 = 2684.4 \text{ kN}$$

### Nudo 2

Por equilibrio (figura EC3.12)



$$C_{27d} = \frac{Q_{2d}}{\sin \alpha_{v27}} = \frac{1805.6}{\sin 25.18} = 4243.6 \text{ kN}$$

FIGURA EC 3-12

$$T_{29d} = (C_{27d} \cdot \cos \alpha_{v27}) \cdot \sin \alpha_{H27} = 4243.6 \cdot \cos 25.18 \cdot \sin 68.01 = 3561.0 \text{ kN}$$

### Nudo 3

Por equilibrio (figura EC3.13)

$$C_{37d} = \frac{Q_{3d}}{\sin \alpha_{v37}} = \frac{1611.1}{\sin 44.25} = 2308.8 \text{ kN}$$

$$T_{34d} = (C_{37d} \cdot \cos \alpha_{v37}) \cdot \cos \alpha_{H37} = 2308.8 \cdot \cos 44.25 \cdot \cos 9.10 = 1633.0 \text{ kN}$$

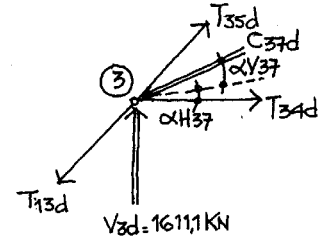


FIGURA EC 3-13

### Nudo 4

Por equilibrio (figura EC3.14)

$$C_{47d} = \frac{Q_{4d}}{\sin \alpha_{v47}} = \frac{2055.6}{\sin 50.90} = 2648.8 \text{ kN}$$

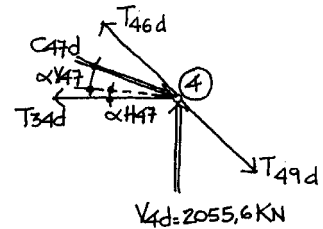


FIGURA EC 3-14

### Nudo 5

Por equilibrio (figura EC3.15)

$$C_{57d} = \frac{Q_{5d}}{\sin \alpha_{v57}} = \frac{1861.1}{\sin 27.34} = 4052.8 \text{ kN}$$

$$T_{58d} = (C_{57d} \cdot \cos \alpha_{v57}) \cdot \cos \alpha_{H57} = 4052.8 \cdot \cos 27.34 \cdot \cos 58.40 = 1886.3 \text{ kN}$$

$$T_{35d} = (C_{57d} \cdot \cos \alpha_{v57}) \cdot \sin \alpha_{H57} = 4052.8 \cdot \cos 27.34 \cdot \sin 58.40 = 3066.4 \text{ kN}$$

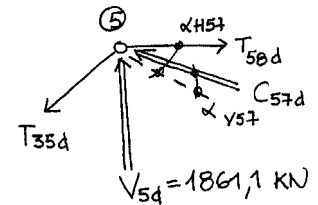


FIGURA EC 3-15

### Nudo 6

Por equilibrio (figura EC3.16)

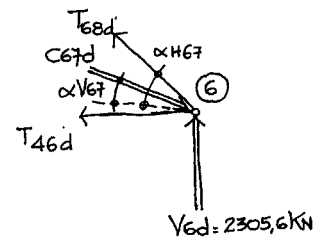


FIGURA EC 3-16

$$C_{67d} = \frac{Q_{6d}}{\sin \alpha_{v67}} = \frac{2305.6}{\sin 28.65} = 4808.1 \text{ kN}$$

$$T_{68d} = (C_{67d} \cdot \cos \alpha_{v67}) \cdot \cos \alpha_{H67} = 4808.1 \cdot \cos 28.65 \cdot \cos 64.20 = 1836.1 \text{ kN}$$

$$T_{46d} = (C_{67d} \cdot \cos \alpha_{v67}) \cdot \sin \alpha_{H67} = 4808.1 \cdot \cos 28.65 \cdot \sin 64.20 = 3798.8 \text{ kN}$$

### Nudo 11

Por equilibrio (figura EC3.17)

$$T_{10,11d} = 27.1 \text{ kN}$$

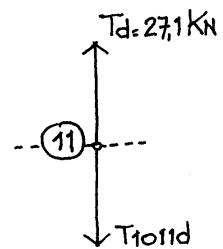


FIGURA EC 3-17

### Nudo 10

Por equilibrio (figura EC3.18)

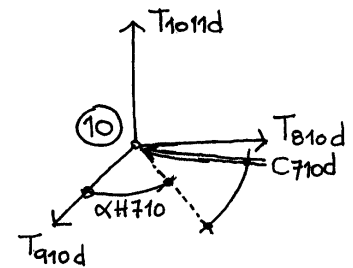


FIGURA EC 3-18

$$C_{7,10d} = \frac{T_{10,11d}}{\sin \alpha_{v7,10}} = \frac{27.1}{\sin 45.15} = 38.2 \text{ kN}$$

$$T_{9,10d} = (C_{7,10d} \cdot \cos \alpha_{v7,10}) \cdot \cos \alpha_{H7,10} = 38.2 \cdot \cos 45.15 \cdot \cos 64.27 = 11.7 \text{ kN}$$

$$T_{8,10d} = (C_{7,10d} \cdot \cos \alpha_{v7,10}) \cdot \sin \alpha_{H7,10} = 38.2 \cdot \cos 45.15 \cdot \sin 64.27 = 24.2 \text{ kN}$$

### Nudo 8

Por equilibrio (figura EC3.19)

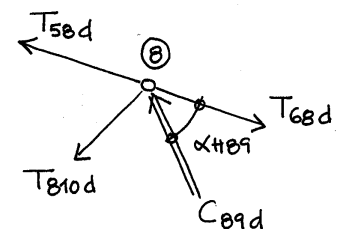


FIGURA EC 3-19

$$C_{89d} = \frac{T_{8,10d}}{\sin \alpha_{H89}} = \frac{24.2}{\sin 64.23} = 26.9 \text{ kN}$$



### Nudo 9

Por equilibrio (figura EC3.20)

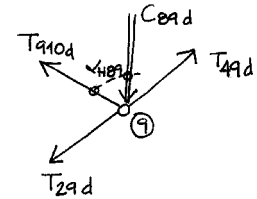


FIGURA EC 3-20

$$T_{49d} = C_{89d} \cdot \cos \alpha_{H89} + T_{29d} = 26.9 \cdot \cos 64.23 + 3561.0 = 3572.7 \text{ kN}$$

Comprobación del equilibrio en nudos comprimidos inferiores:

$$\begin{aligned} \sum F_x = & (C_{17d} \cdot \cos \alpha_{17v} \cdot \cos \alpha_{17H}) - (C_{27d} \cdot \cos \alpha_{27v} \cdot \cos \alpha_{27H}) + (C_{37d} \cdot \cos \alpha_{37v} \cdot \cos \alpha_{37H}) - \\ & - (C_{47d} \cdot \cos \alpha_{47v} \cdot \cos \alpha_{47H}) + (C_{57d} \cdot \cos \alpha_{57v} \cdot \cos \alpha_{57H}) - (C_{67d} \cdot \cos \alpha_{67v} \cdot \cos \alpha_{67H}) + \\ & + (C_{7,10d} \cdot \cos \alpha_{7,10v} \cdot \cos \alpha_{7,10H}) = 3310.9 \cdot \cos 24.27 \cdot \cos 62.80 - 4243.6 \cdot \cos 25.18 \cdot \\ & \cos 68.01 + 2308.8 \cdot \cos 44.25 \cdot \cos 9.10 - 2648.8 \cdot \cos 50.90 \cdot \cos 11.52 + 4052.80 \cdot \\ & \cos 27.34 \cdot \cos 58.40 - 4808.1 \cdot \cos 28.65 \cdot \cos 64.20 + 38.2 \cdot \cos 45.15 \cdot \cos 64.27 \approx 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_y = & (C_{17d} \cdot \cos \alpha_{17v} \cdot \sin \alpha_{17H}) + (C_{27d} \cdot \cos \alpha_{27v} \cdot \sin \alpha_{27H}) + (C_{37d} \cdot \cos \alpha_{37v} \cdot \sin \alpha_{37H}) + \\ & + (C_{47d} \cdot \cos \alpha_{47v} \cdot \sin \alpha_{47H}) - (C_{57d} \cdot \cos \alpha_{57v} \cdot \sin \alpha_{57H}) - (C_{67d} \cdot \cos \alpha_{67v} \cdot \sin \alpha_{67H}) + \\ & + (C_{7,10d} \cdot \cos \alpha_{7,10v} \cdot \sin \alpha_{7,10H}) = 3310.9 \cdot \cos 24.27 \cdot \sin 62.80 + 4243.6 \cdot \cos 25.18 \cdot \\ & \sin 68.01 + 2308.8 \cdot \cos 44.25 \cdot \sin 9.10 + 2648.8 \cdot \cos 50.90 \cdot \sin 11.52 - 4052.80 \cdot \\ & \cos 27.34 \cdot \sin 58.40 - 4808.1 \cdot \cos 28.65 \cdot \sin 64.20 + 38.2 \cdot \cos 45.15 \cdot \sin 64.27 \approx 0 \end{aligned}$$

Comprobación del equilibrio en nudo comprimido superior:

$$\begin{aligned} \sum F_z = & (C_{17d} \cdot \sin \alpha_{17v}) + (C_{27d} \cdot \sin \alpha_{27v}) + (C_{37d} \cdot \sin \alpha_{37v}) + (C_{47d} \cdot \sin \alpha_{47v}) + (C_{57d} \cdot \sin \alpha_{57v}) + \\ & + (C_{67d} \cdot \sin \alpha_{67v}) + (C_{7,10d} \cdot \sin \alpha_{7,10v}) = 3310.9 \cdot \sin 24.27 + 4243.6 \cdot \sin 25.18 + 2308.8 \cdot \\ & \sin 44.25 + 2648.8 \cdot \sin 50.90 + 4052.8 \cdot \sin 27.34 + 4808.1 \cdot \sin 28.65 + 38.2 \cdot \sin 45.15 \approx \\ & 11027.1 \text{ kN.} \end{aligned}$$

### 3º DISEÑO DE ARMADURA

Se limita la tensión en el acero  $f_{yd} \leq 40 \text{ kN/cm}^2$  para el control indirecto de la fisuración

#### HIPÓTESIS N°1

$$T_{12d} = 1556.9 \text{ kN} \quad A_{s12} = \frac{1556.9}{40} = 38.9 \text{ cm}^2$$

$$T_{24d} = 3459.8 \text{ kN} \quad A_{s24} = \frac{3459.8}{40} = 86.5 \text{ cm}^2$$

$$T_{46d} = 3565.8 \text{ kN} \quad A_{s46} = \frac{3565.8}{40} = 89.2 \text{ cm}^2$$

$$T_{56d} = 1749.0 \text{ kN} \quad A_{s56} = \frac{1749.0}{40} = 43.7 \text{ cm}^2$$

$$T_{35d} = 3178.2 \text{ kN} \quad A_{s35} = \frac{3178.2}{40} = 79.5 \text{ cm}^2$$

$$T_{13d} = 3042.6 \text{ kN} \quad A_{s13} = \frac{3042.6}{40} = 76.1 \text{ cm}^2$$

$$T_{34d} = 1653.0 \text{ kN} \quad A_{s34} = \frac{1653.0}{40} = 41.3 \text{ cm}^2$$

#### HIPÓTESIS N°2

$$T_{12d} = 1379.6 \text{ kN} \quad A_{s12} = \frac{1379.6}{40} = 34.5 \text{ cm}^2$$

$$T_{29d} = 3561.0 \text{ kN} \quad A_{s29} = \frac{3561.0}{40} = 89.0 \text{ cm}^2$$

$$T_{46d} = 3798.8 \text{ kN} \quad A_{s46} = \frac{3798.8}{40} = 95.0 \text{ cm}^2$$

$$T_{68d} = 1836.1 \text{ kN} \quad A_{s68} = \frac{1836.1}{40} = 45.9 \text{ cm}^2$$

$$T_{58d} = 1886.3 \text{ kN} \quad A_{s58} = \frac{1886.3}{40} = 47.2 \text{ cm}^2$$

$$T_{35d} = 3066.4 \text{ kN} \quad A_{s35} = \frac{3066.4}{40} = 76.7 \text{ cm}^2$$

$$T_{13d} = 2684.4 \text{ kN} \quad A_{s13} = \frac{2684.4}{40} = 67.1 \text{ cm}^2$$

$$T_{34d} = 1633.0 \text{ kN} \quad A_{s34} = \frac{1633.0}{40} = 40.8 \text{ cm}^2$$

$$T_{49d} = 3572.7 \text{ kN} \quad A_{s49} = \frac{3572.7}{40} = 89.3 \text{ cm}^2$$

$$T_{9,10d} = 11.7 \text{ kN} \quad A_{s9,10} = \frac{11.7}{40} = 0.3 \text{ cm}^2$$

$$T_{8,10d} = 24.2 \text{ kN} \quad A_{s8,10} = \frac{24.2}{40} = 0.6 \text{ cm}^2$$

$$T_{10,11d} = 27.1 \text{ kN} \quad A_{s10,11} = \frac{27.1}{40} = 0.7 \text{ cm}^2$$

#### 4º COMPROBACIÓN DE NUDOS

##### HIPÓTESIS N°1

Las bielas  $C_{17d}$ ,  $C_{27d}$ ,  $C_{37d}$ ,  $C_{47d}$ ,  $C_{57d}$ ,  $C_{67d}$  confluyen en el punto en el que se produce la transmisión de la carga del fuste al elemento de cimentación. Este nudo es un nudo multicomprimido con un estado triaxial de compresiones, por lo que la capacidad resistente del mismo adopta un valor de  $f_{3cd}=3.30f_{cd}$ . Este valor resulta superior al valor de la capacidad resistente del hormigón que dimensiona el área de transmisión de la carga desde el fuste al pilote, por lo que no resulta necesaria la comprobación específica del citado nudo.

En lo que respecta a los nudos inferiores, puntos de confluencia de las bielas de transmisión de carga del fuste con los tirantes inferiores y con el centro de gravedad de los pilotes, se lleva a cabo la comprobación para la biela más desfavorable, que de acuerdo con los resultados obtenidos resulta ser la biela  $C_{67d}$ , con un esfuerzo axial de compresión de valor 4462.7 kN. Como este nudo, que se representa en la figura EC3.21, se trata de un nudo en el que se incluye un tirante que resulta preciso anclar en él, la capacidad resistente a compresión del hormigón se limita al valor  $\sigma_{cd} \leq 0.70f_{cd}$ .

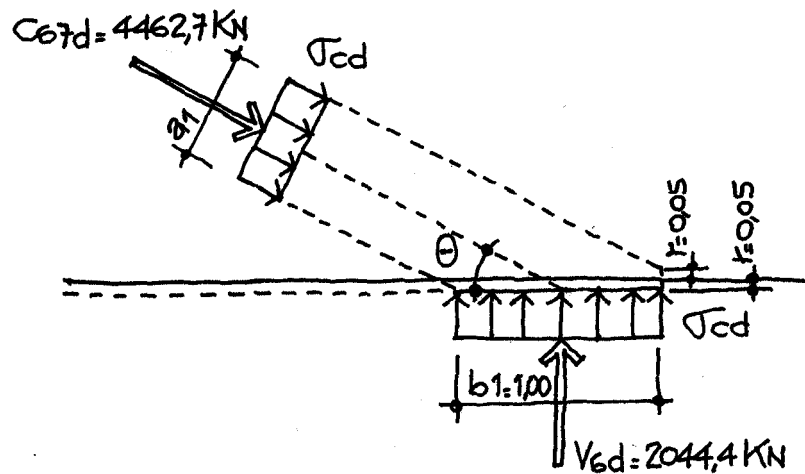


Figura EP3.21

Se calcula en primer lugar la compresión en el hormigón.

Como ya se ha tenido ocasión de comprobar:  $\theta = \alpha_{v67} = 27.27^\circ$

Por geometría  $a_1 = b_1 \sin \theta + 2 r \cos \theta$

Con  $r = 0.05 \text{ m}$

$$a_1 = 1.00 \sin 27.27^\circ + 0.10 \cos 27.27^\circ = 0.547 \text{ m}$$

$$f_{1cd} = 0.70 f_{cd} = 0.70 \frac{30 \cdot 10^3 \text{ kN/m}^2}{1.50} = 14000 \text{ kN/m}^2$$

Admitiendo la forma de la biela inferior vertical como cilíndrica circular y de la biela superior inclinada como cilíndrica elíptica, se tiene:

$$\sigma_{cv6d} = \frac{V_{6d}}{\frac{\pi}{4} \cdot b_1^2} = \frac{2044.4}{3.14 \cdot 0.25 \cdot 1.00^2} = 2602 \text{ kN/m}^2 < f_{1cd} \quad \text{Cumple}$$

$$\sigma_{c67d} = \frac{C_{67d}}{\frac{\pi}{4} \cdot a_1 \cdot a_2} = \frac{4462.7}{3.14 \cdot 0.25 \cdot 0.547 \cdot 1.00} = 10387 \text{ kN/m}^2 < f_{1cd} \quad \text{Cumple}$$

Con  $a_2 = b_1 = 1.00 \text{ m}$ , por ser éste el diámetro del pilote.

Anclaje de la armadura

Es precisa la materialización del anclaje de las armaduras que materializan el tirante, para lo cual se cuenta con una longitud  $l_{b,l}$

$$L_{bl} = m \cdot \phi^2 = 13 \cdot 3.2^2 = 133 \text{ cm}$$

Como puede apreciarse en la figura EC3.22 el vuelo de 50 cm planteado en el encepado permite el anclaje de esta armadura sin la disposición de patilla.

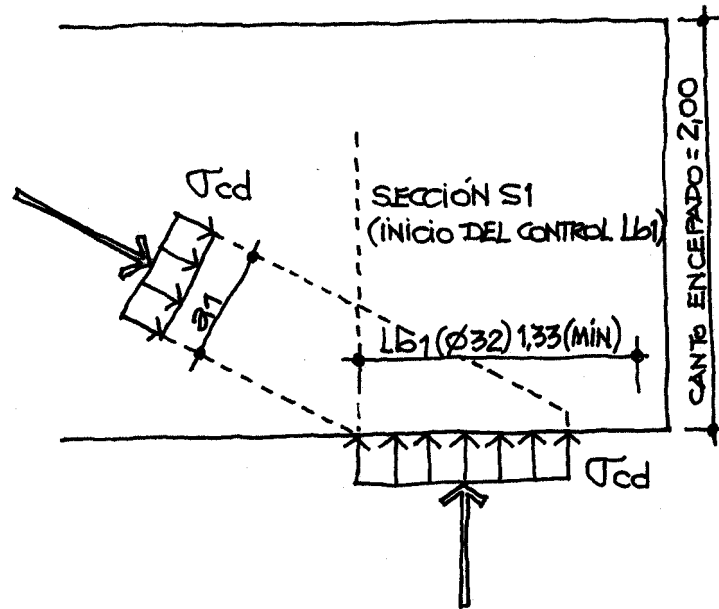


Figura EC3.22

## HIPÓTESIS Nº2

Análogamente a lo expuesto en la hipótesis nº1, las bielas  $C_{17d}$ ,  $C_{27d}$ ,  $C_{37d}$ ,  $C_{47d}$ ,  $C_{57d}$ ,  $C_{67d}$  y  $C_{7,10d}$  confluyen en el punto en el que se produce la transmisión de la carga del fuste al elemento de cimentación. Este nudo es un nudo multicomprimido con un estado triaxial de compresiones, por lo que la capacidad resistente del mismo adopta un valor de  $f_{3cd}=3.30f_{cd}$ . Este valor resulta superior al valor de la capacidad resistente del hormigón que dimensiona el área de transmisión de la carga desde el fuste al pilote, por lo que no resulta necesaria la comprobación específica del citado nudo.

En lo que respecta a los nudos inferiores, se lleva a cabo la comprobación para la biela más desfavorable, que de acuerdo con los resultados obtenidos resulta ser la biela  $C_{67d}$ , con un esfuerzo axial de compresión de valor 4808.1 kN. Como este nudo, que se representa en la figura EP3.23, se trata de un nudo en el que se incluye un tirante que resulta preciso anclar, en él la capacidad resistente a compresión del hormigón se limita al valor  $\sigma_{cd} \leq 0.70f_{cd}$ .

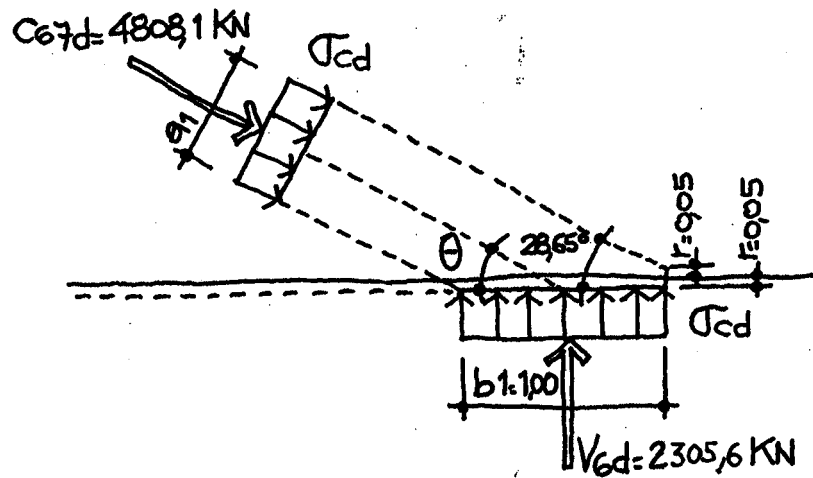


Figura EC3.23

Se calcula en primer lugar la compresión en el hormigón.

Como ya se ha visto:  $\theta = 28.65^\circ$ .

Por geometría:  $a_1 = b_1 \sin \theta + 2 r \cos \theta$

Con  $r = 0.05$  m

$$a_1 = 1.00 \sin 28.65^\circ + 0.10 \cos 28.65^\circ = 0.567 \text{ m}$$

$$f_{1cd} = 0.70 f_{cd} = 0.70 \frac{30 \cdot 10^3 \text{ kN/m}^2}{1.50} = 14000 \text{ kN/m}^2$$

Admitiendo la forma de la biela inferior vertical como cilíndrica circular y de la biela superior inclinada como cilíndrica elíptica, se tiene (con  $a_2 = b_1 = 1.00$  m):

$$\sigma_{cv6d} = \frac{V_{6d}}{\frac{\pi}{4} \cdot b_1^2} = \frac{2305.6}{3.14 \cdot 0.25 \cdot 1.00^2} = 2935.6 \text{ kN/m}^2 < f_{1cd} \quad \text{Cumple}$$

$$\sigma_{c67d} = \frac{C_{67d}}{\frac{\pi}{4} \cdot a_1 \cdot a_2} = \frac{4808.1}{3.14 \cdot 0.25 \cdot 0.567 \cdot 1.00} = 10796.9 \text{ kN/m}^2 < f_{1cd} \quad \text{Cumple}$$

#### Anclaje de la armadura

Es preciso asegurar el anclaje de las armaduras que materializan el tirante, para lo cual se cuenta con una longitud  $l_{b,l}$

$$l_{bl} = m \cdot \phi^2 = 13 \cdot 3.2^2 = 133 \text{ cm}$$

Como puede apreciarse en la figura EC3.24 el vuelo de 50 cm planteado en el encepado permite el anclaje de esta armadura sin la disposición de patilla.

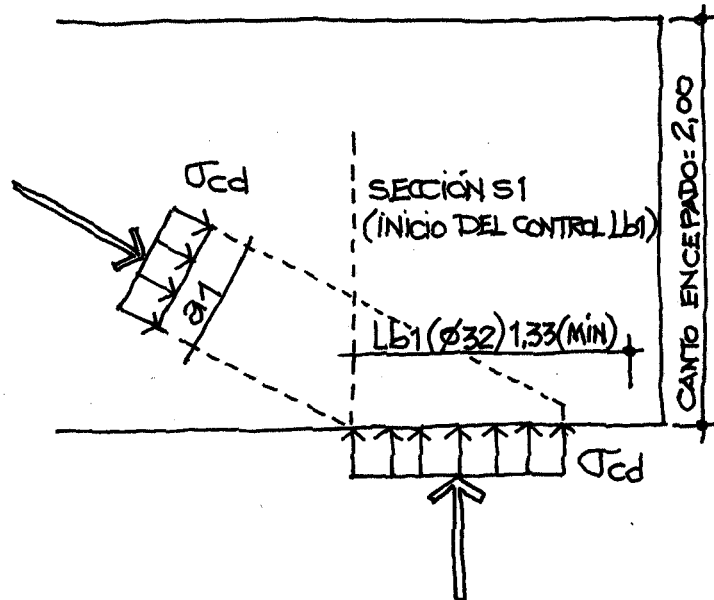


Figura EC3.24

## 5. ARMADO

Se ha efectuado un único armado envolvente de las dos hipótesis estudiadas. Las familias de armaduras que hay que disponer en la cara inferior son las siguientes:

- **Armadura principal**, que se dispondrá en bandas entre pilotes. La definición de banda, de acuerdo con EHE (Art. 59.4.1.2.2) es la zona cuyo eje es la línea que une los centros de los pilotes y cuyo ancho es igual al diámetro del pilote más dos veces la distancia entre la cara superior del pilote y el centro de gravedad de la armadura del tirante. En el presente ejemplo esta anchura de bandas resulta ser igual a 1.10 m.
- **Armadura secundaria horizontal**, que se situará entre la armadura principal definida anteriormente y paralela a la misma. La capacidad mecánica de esta armadura no será inferior a la cuarta parte de la capacidad mecánica de las bandas o fajas.
- **Armadura secundaria vertical**, dispuesta a modo de cercos, atando la armadura principal entre bandas. La necesidad de esta armadura viene motivada por la dispersión del campo de compresiones, y su capacidad mecánica total no será inferior al valor de  $N_d/(1.5n)$ , siendo  $n$  el número de pilotes. Para el presente ejemplo la capacidad mecánica de esta armadura deberá ser superior a  $N_d/9$

### Armadura principal

El tirante más desfavorable en la dirección perpendicular al eje del puente (transversal), corresponde a la hipótesis de cálculo nº2, y es el tirante denominado  $T_{46d}$ . El valor de la armadura que se obtuvo es de  $94.97 \text{ cm}^2$ . Se plantea una banda de armadura principal en

dirección perpendicular al eje del puente compuesta por 12 $\phi$ 32 (separación entre barras de 10 cm).

En la dirección paralela al eje del puente, el tirante más desfavorable resulta ser, en la hipótesis de cálculo nº2, el tirante  $T_{58d}$  con un valor de la armadura de 47.16 cm<sup>2</sup>. Se plantea una banda de armadura principal en dirección paralela al eje del puente compuesta por 12 $\phi$ 25 (separación entre barras de 10 cm).

### **Armadura secundaria horizontal**

La armadura horizontal de las zonas comprendidas entre bandas ha de tener, al menos una cuarta parte de la capacidad mecánica de las bandas adyacentes. Por lo tanto la armadura secundaria horizontal en dirección transversal total deberá ser superior a  $192.96/4=48.24$  cm<sup>2</sup>. Esta armadura se dispone en una anchura de  $5.00-2 \times 1.10-2 \times 0.05=2.70$  m. La armadura resultante por metro lineal es por tanto de  $48.24/2.70=17.87$  cm<sup>2</sup>/ml. Se disponen  $\phi$ 20 a 15 cm (20.94 cm<sup>2</sup>/ml).

En lo que se refiere a la armadura secundaria horizontal en dirección paralela al eje del puente (dirección longitudinal), como armadura principal se han dispuesto tres bandas de anchura 1.10 m con 12 $\phi$ 25 en cada banda, o lo que es lo mismo, 58.91 cm<sup>2</sup> en cada banda. De este modo la armadura secundaria horizontal en dirección transversal será al menos de  $176.72/4=44.18$  cm<sup>2</sup>. Repartiendo esta armadura en los 4.60 m no cubiertos por las bandas se obtiene una cuantía de 9.60 cm<sup>2</sup>/m. Con objeto de formar una cuadrícula de armadura secundaria horizontal perfectamente ortogonal se disponen  $\phi$ 16 a 15 cm.

Se hace notar que estas cuantías propuestas por EHE resultan valores superiores a los tirantes de armadura secundaria que se han obtenido en la hipótesis nº2.

### **Armadura secundaria vertical**

La carga mayorada del pilote pésimo es de 2305.6 kN. La capacidad mecánica de la armadura vertical a disponer ha de ser, por tanto superior al valor de  $2305.6/1.5=1537.1$  kN. Trabajando el acero a un máximo de 400 MPa se tiene que la armadura secundaria vertical a disponer será superior a  $1537/40=38.43$  cm<sup>2</sup> kN. Esta armadura ha de extenderse en la longitud tributaria de cada pilote, es decir en 2.00 m, con lo que se obtiene una cuantía de 19.20 cm<sup>2</sup>/ml. Se disponen cercos  $\phi$ 16 a 20 cm.

En lo que respecta al paramento superior del encepado, y de acuerdo con los modelos empleados, estrictamente no sería preciso el concurso de armadura en esta zona. En cualquier caso se dispondrá armadura  $\phi$ 16 a 15 cm, con objeto de formar una cuadrícula de armadura superior igual a la cuadrícula de armadura horizontal secundaria dispuesta en la cara inferior.

Con objeto de conseguir que no quede ningún paramento “desnudo”, se dispone como armadura de piel a lo largo del canto del encepado 8 barras  $\phi$ 16.

En las figuras EC3.24 y EC3.25 se muestran la armaduras inferior y superior propuestas, respectivamente.





*Figura EC3.25. Armadura inferior propuesta*

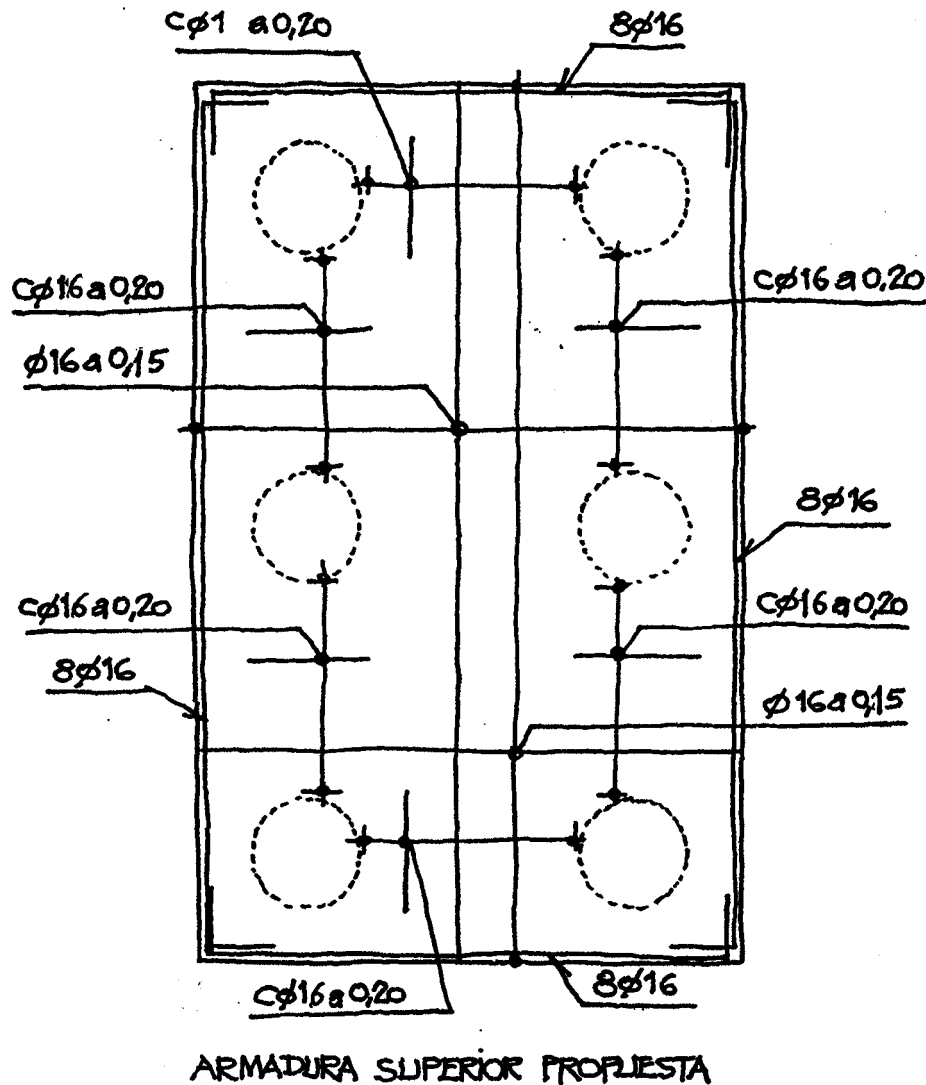


Figura EC3.26. Armadura superior propuesta

Por último es importante reseñar que en la hipótesis n°2, en la que aparece un tirante vertical (que coincide con la armadura longitudinal de la pila) que llega al nudo n°10, el anclaje de este tirante ha de realizarse desde el punto de acometida en este nudo con la biela denominada como  $C_{7,10d}$ , por lo que la correspondiente longitud de anclaje necesaria de la armadura de la pila deberá ser al menos (contando con un anclaje en patilla y barras de diámetro  $\phi 25$  mm) igual a  $0.70 \cdot 1.15 = 0.80$  m.

#### **EC.4. Encepado de pantalla contraviento**

La pila pantalla de la figura EC4.1 se cimenta mediante una pantalla de hormigón armado. La transición entre la pila y su cimentación se realiza mediante un elemento intermedio (encepado) de 5.60 m de ancho y 1.20 m de canto que se desea proyectar mediante el método de bielas y tirantes.

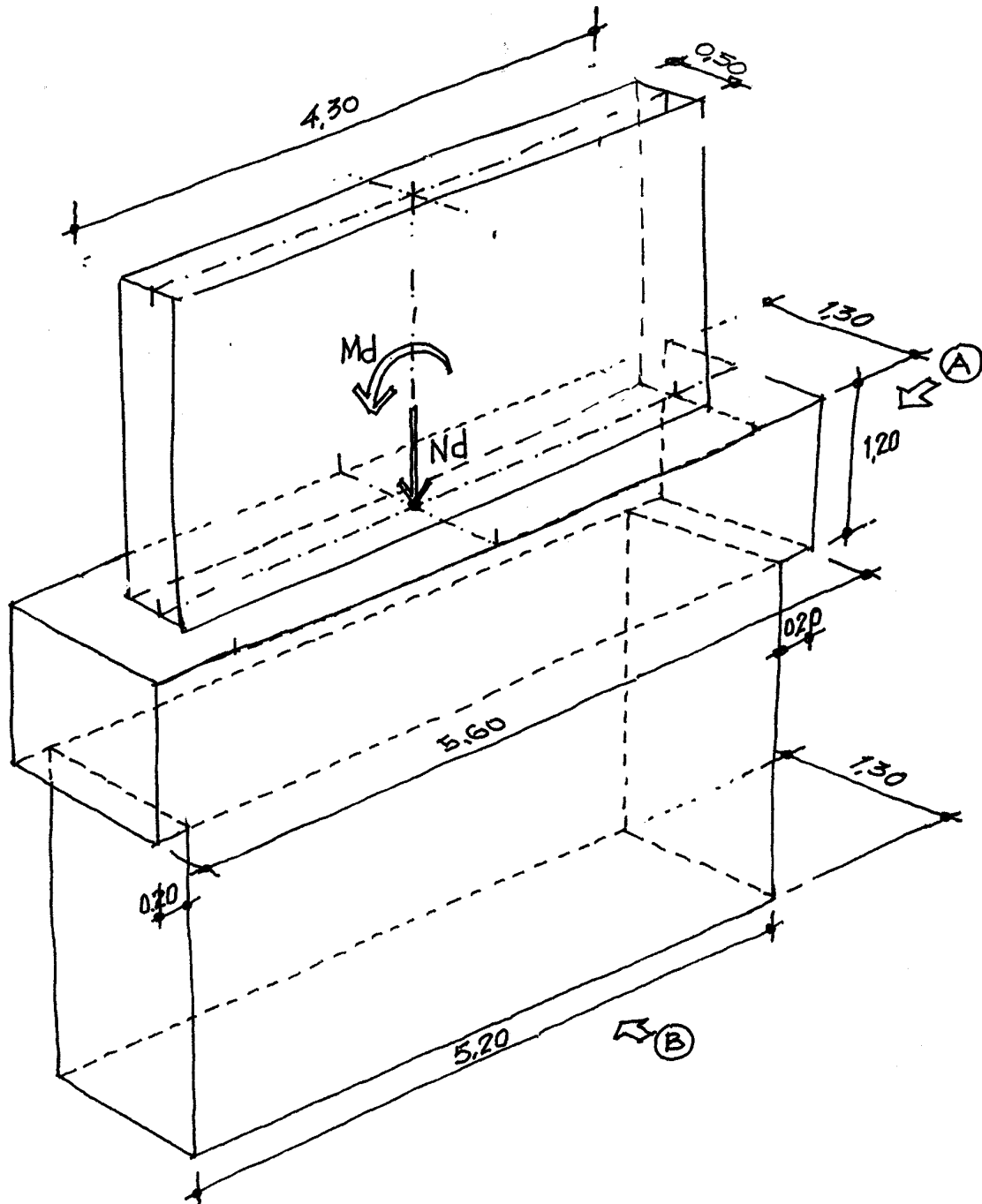


Figura EC4.1.

Las cargas solicitantes se indican en la figura EC4.2. Los tres elementos se construyen con hormigón H-25 y acero B500S y suponiendo un control normal resulta  $\gamma_c=1.50$  y  $\gamma_s=1.15$ .

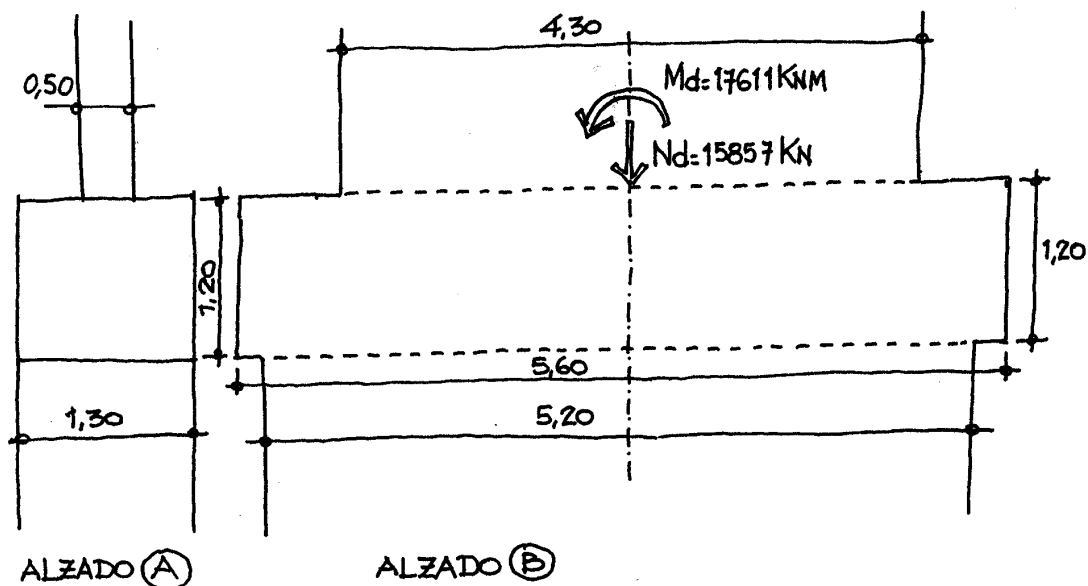


Figura EC4.2.

## HIPÓTESIS A

### 1º. PLANTEAMIENTO DEL MECANISMO RESISTENTE

Se considera en primer lugar que la pantalla de cimentación no resiste tracciones (hipótesis A) (figura EC4.3)

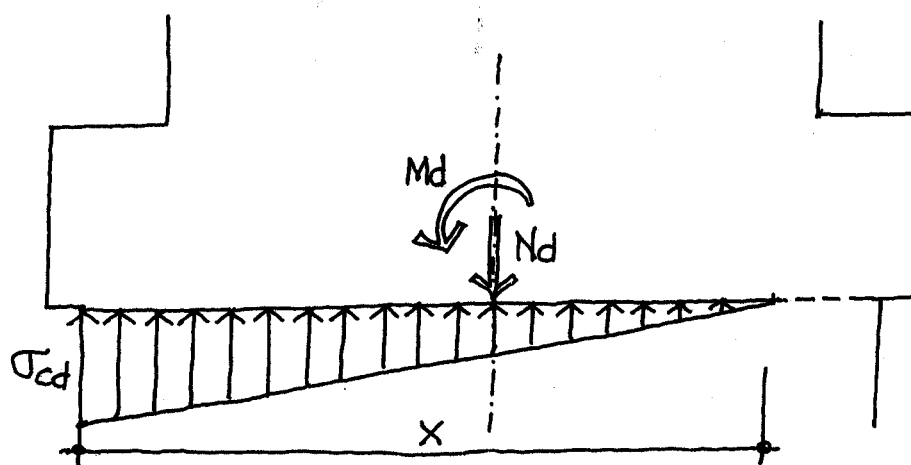


Figura EC4.3

Por equilibrio,

$$\frac{1}{2}(\sigma \cdot x \cdot 1.30) = 15857 \text{ kN}$$

$$15857 \cdot \left( \frac{5.2}{2} - \frac{x}{3} \right) = 17611 \text{ kNm}$$

Resolviendo  $x = 4.47 \text{ m}$      $\sigma = 5458 \text{ kN/m}^2$

La reacción del terreno se considera dividida en dos partes con igual longitud. Sus resultantes son:

$$\begin{aligned} R_{1d} &= (5458 + 2729) \cdot 4.46 \cdot 1.30/4 = 11883 \text{ kN} \\ x_1 &= [(2 \cdot 2729 + 5458) / (2729 + 5458)] \cdot 2.233/3 = 0.99 \text{ m} \\ R_{2d} &= 2729 \cdot 4.46 \cdot 1.30/4 = 3961 \text{ kN} \\ x_2 &= 2.233/3 = 0.74 \text{ m} \end{aligned}$$

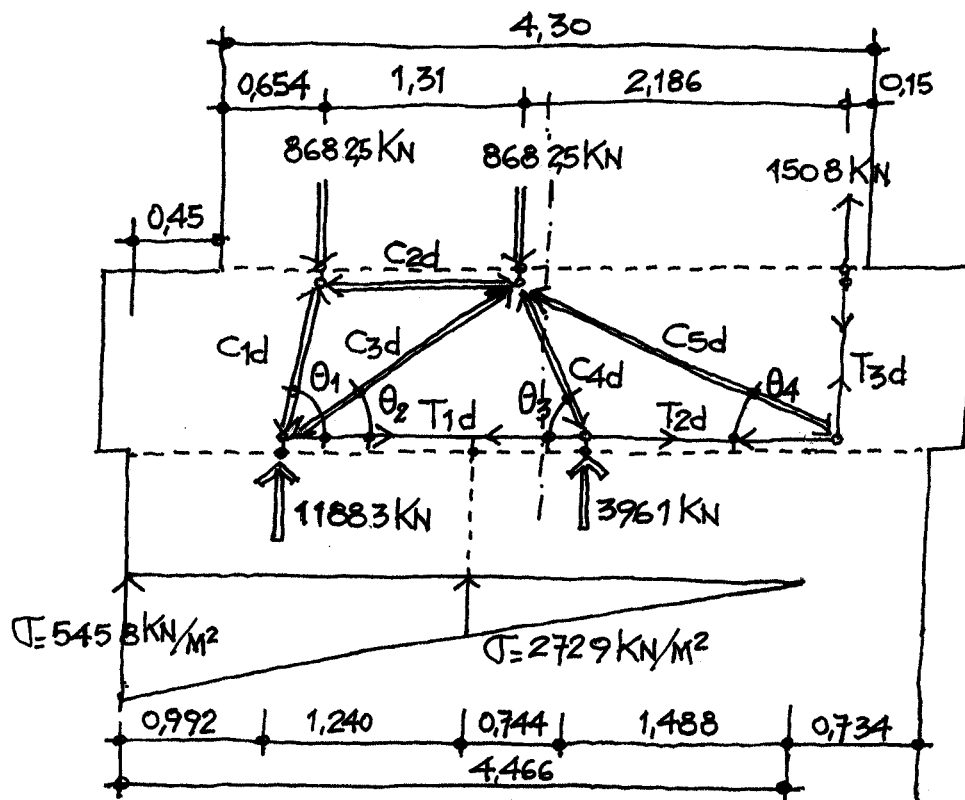


Figura EC.4.4

Los esfuerzos transmitidos por la pila-pantalla pueden considerarse equivalentes a dos fuerzas de compresión y una tracción, según se indica en la figura EC4.4.

## 2º. COMPROBACIÓN DEL EQUILIBRIO

De la figura EC4.4 se deducen los siguientes valores.

Reacciones:

$$\Sigma N = 0 \quad 8682.5 \cdot 2 - 1508 = 15857 \text{ kN}$$

$$\Sigma M = 0 \quad 8682.5 \cdot 1.49 + 8682.5 \cdot 0.18 + 1508 \cdot 2.0 = 17616 \text{ kN} \Rightarrow \text{Cumple}$$

Acciones

$$\Sigma M = 0 \quad 17365 \cdot 0.84 - 1508 \cdot 2.0 = 17611 = 17611 \text{ kNm}$$

$$\Sigma N = 0 \quad 17365 - 1508 = 15857 \text{ kN} \Rightarrow \text{Cumple}$$

Los ángulos de la figura EC4.4 se pueden obtener según

$$\theta_1 = \arctan \frac{1.2 \cdot 0.85}{0.45 + 0.65 - 0.99} = 83.7^\circ$$

$$\theta_2 = \arctan \frac{1.2 \cdot 0.85}{0.45 + 0.65 + 1.31 - 0.99} = 35.66^\circ$$

$$\theta_3 = \arctan \frac{1.2 \cdot 0.85}{0.99 + 1.24 + 0.74 - (0.45 + 0.65 + 1.31)} = 61.1^\circ$$

$$\theta_4 = \arctan \frac{1.2 \cdot 0.85}{2.186} = 25^\circ$$

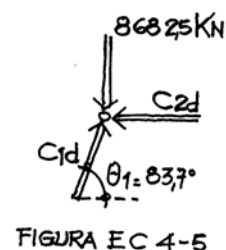
Se procede a calcular los esfuerzos en bielas y tirantes, a partir del equilibrio de los nudos.

### Nudo 1

Por equilibrio, de acuerdo con la figura EC4.5

$$8683 = C_{1d} \sin 83.7 \rightarrow C_{1d} = 8735 \text{ kN}$$

$$C_{1d} \cos 83.7 = C_{2d} \rightarrow C_{2d} = 959 \text{ kN}$$

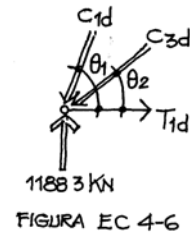


### Nudo 2

Análogamente, según la figura EC4.6

$$11883 = C_{1d} \sin 83.7 + C_{3d} \sin 35.7 \quad \rightarrow \quad C_{3d} = 5485 \text{ kN}$$

$$C_{1d} \cos 83.7 + C_{3d} \cos 35.7 = T_{1d} \quad \rightarrow \quad T_{1d} = 5412 \text{ kN}$$

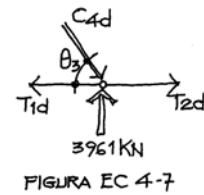


### Nudo 3

De acuerdo con la figura EC4.7

$$3960 = C_{4d} \sin 61.1 \quad \rightarrow \quad C_{4d} = 4524 \text{ kN}$$

$$T_{2d} + C_{4d} \cos 61.1 = T_{1d} \quad \rightarrow \quad T_{2d} = 3225 \text{ kN}$$

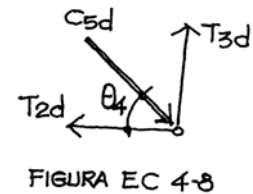


### Nudo 4

Del equilibrio del nudo indicado en EC4.8

$$T_{2d} + C_{5d} \cos 25 \quad \rightarrow \quad C_{5d} = 3559 \text{ kN}$$

Comprobación:  $T_{3d} = C_{5d} \sin 25 = 1504 \text{ kN}$

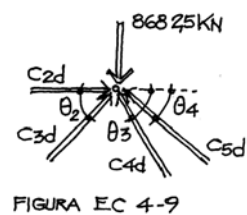


### Nudo 5

Por último se comprueba el nudo de la figura EC4.9

$$C_{4d} \cos 61.1 + C_{5d} \cos 25 = C_{2d} + C_{3d} \cos 35.7 = 5412 \quad \text{Cumple}$$

$$C_{3d} \sin 35.7 + C_{4d} \sin 61.1 + C_{5d} \sin 25 = 8683 \quad \text{Cumple}$$



## **HIPÓTESIS B**

### **1º. PLANTEAMIENTO DEL MECANISMO RESISTENTE**

En esta hipótesis se considera que parte de la pantalla puede trabajar a tracción.

$$N_d = 15857 \text{ kN}$$

$$M_d = 17611 \text{ kN}$$



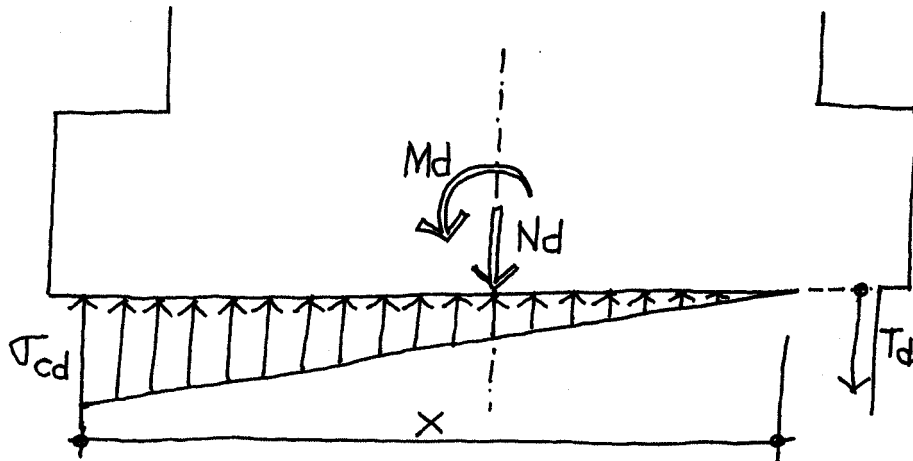


Figura EC4.10.

En este caso, con la notación de la figura EC4.10, se puede realizar el análisis de la sección suponiendo una distribución de tensiones lineal en el hormigón. Se obtiene así:

$$X = 4.61 \text{ m}$$

$$\sigma_{cd} = 5357 \text{ kN/m}^2$$

$$T_d = 214 \text{ kN (ver figura EC4.11)}$$

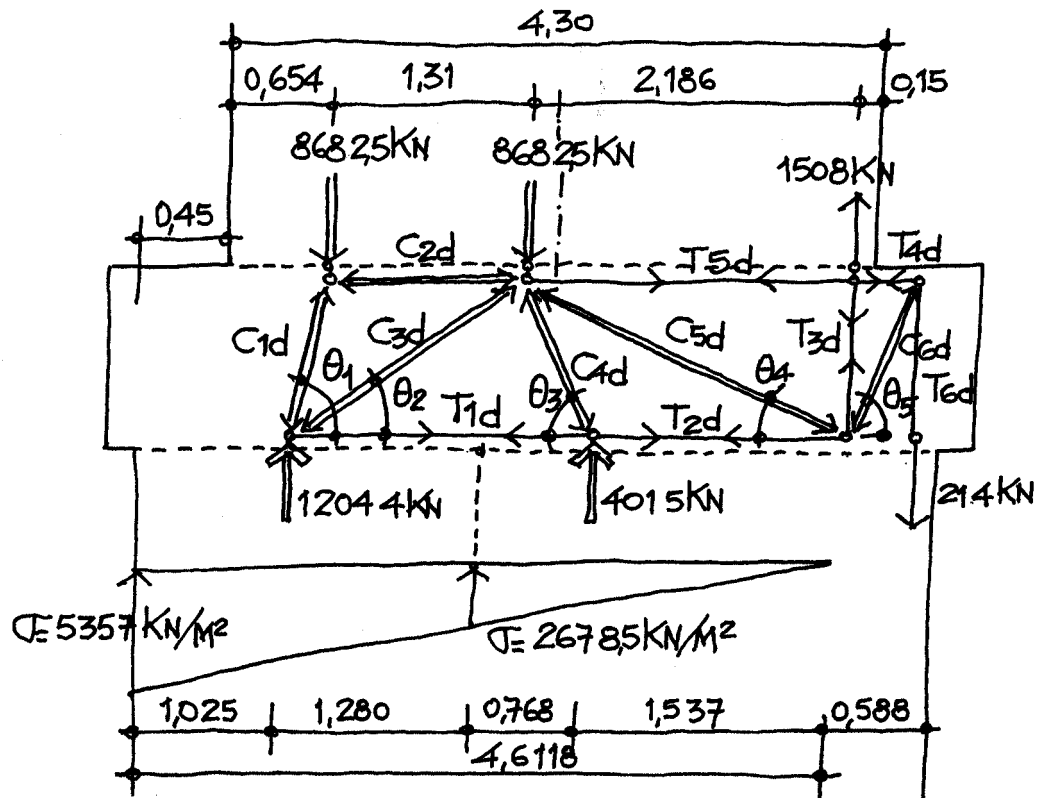


Figura EC4.11

Si se divide el volumen de compresión de la pantalla en dos partes, se obtiene:

$$R_{1d} = (5357 + 2678) \frac{4.61}{4} 1.3 = 12044 \text{ kN}$$

$$x_{1d} = \frac{4.61}{6} \left[ \frac{2 \cdot 2678 + 5357}{2678 + 5357} \right] = 1.025 \text{ m}$$

$$R_{2d} = 2678.5 \frac{4.61}{4} 1.3 = 4015 \text{ kN}$$

$$z = \frac{4.61}{6} = 0.77 \text{ m}$$

## 2º COMPROBACIÓN DEL EQUILIBRIO

### Acciones

De acuerdo con la figura EC4.11

$$\Sigma N = 0 \quad 8682.5 \cdot 2 - 1508 = 15857 \text{ kN}$$

$$\Sigma M = 0 \quad 8682.5 \cdot 1.49 + 8682.5 \cdot 0.18 + 1508 \cdot 2.0 = 17616 \text{ kN} \Rightarrow \text{Cumple}$$

### Reacciones:

$$\Sigma N = 0 \quad 11883 + 3961 = 15844 \text{ kN}$$

$$\Sigma M = 0 \quad 11883 \cdot 1.60 - 3961 \cdot 0.37 = 17609 \text{ kNm} \Rightarrow \text{Cumple}$$

A partir de la geometría del sistema resistente indicado en la figura EC4.11 se pueden determinar los ángulos siguientes:

$$\theta_1 = \arctan \frac{1.2 \cdot 0.85}{0.45 + 0.65 - 1.02} = 85.6^\circ$$

$$\theta_2 = \arctan \frac{1.2 \cdot 0.85}{0.45 + 0.65 + 1.31 - 1.02} = 36.3^\circ$$

$$\theta_3 = \arctan \frac{1.2 \cdot 0.85}{1.02 + 1.28 + 0.76 - (0.45 + 0.65 + 1.31)} = 57.1^\circ$$

$$\theta_4 = \arctan \frac{1.2 \cdot 0.85}{2.18} = 25^\circ$$

$$\theta_5 = \arctan \frac{1.2 \cdot 0.85}{0.15 + 0.45 - 0.05} = 61.7^\circ$$

Comprobación de nudos: Se efectúa según el mecanismo indicado en la figura EC4.11

### Nudo 1

Según la figura EC4.12

$$8683 = C_{1d} \sin 85.6 \rightarrow C_{1d} = 8708 \text{ kN}$$

$$C_{1d} \cos 85.6 = C_{2d} \rightarrow C_{2d} = 668 \text{ kN}$$

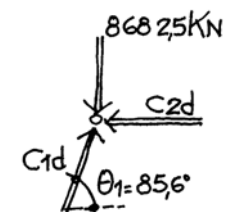


FIGURA EC 4-12

### Nudo 2

De acuerdo con la figura EC4.13

$$12044 = C_{1d} \text{ sen } 85.6 + C_{3d} \text{ sen } 36.3 \rightarrow C_{3d} = 5678 \text{ kN}$$

$$C_{1d} \cos 85.6 + C_{3d} \cos 36.3 = T_{1d} \rightarrow T_{1d} = 5244 \text{ kN}$$

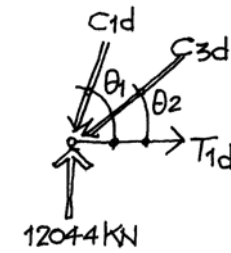


FIGURA EC 4-13

### Nudo 3

De acuerdo con la figura EC4.14

$$4015 = C_{4d} \text{ sen } 57.1 \rightarrow C_{4d} = 4782 \text{ kN}$$

$$T_{2d} + C_{4d} \cos 57.1 = T_{1d} \rightarrow T_{2d} = 2647 \text{ kN}$$

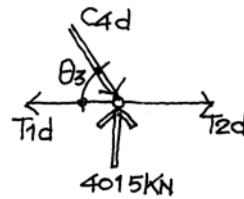


FIGURA EC 4-14

### Nudo 4

Del equilibrio del nudo indicado en la figura EC4.15

$$C_{6d} \text{ sen } 61.7 = T_{6d} \rightarrow C_{6d} = 24.3 \text{ kN}$$

$$T_{4d} + C_{5d} \cos 61.7 \rightarrow T_{4d} = 115 \text{ kN} \quad T_{5d} = T_{4d}$$

$$T_{3d} = 1508 \text{ kN} = C_{5d} \text{ sen } 25 + C_{6d} \text{ sen } 61.7 \rightarrow C_{5d} = 3062 \text{ kN}$$

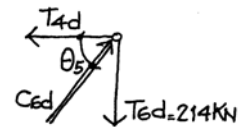


FIGURA EC 4-15

### Nudo 5

Según la figura EC2.15

Se comprueba que  $T_{2d} + C_{6d} \cos 61.7 = C_{5d} \cos 25$

$2762 \cong 2775$  Cumple



FIGURA EC 4-16

### Nudo 6

Se comprueba que:

$8682 = C_{3d} \text{ sen } 36.3 + C_{4d} \text{ sen } 57.1 + C_{5d} \text{ sen } 25 = 8670$  Cumple

$C_{2d} + C_{3d} \cos 36.3 + T_{5d} = C_{4d} \cos 57.1 + C_{5d} \cos 25$

$5359 \cong 5372$  Cumple

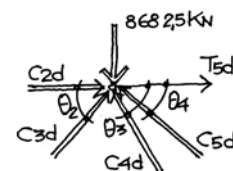


FIGURA EC 4-17

### 3º SENTIDO TRANSVERSAL

En el sentido transversal también se produce una dispersión de las compresiones, ver figura EC4.18.

La armadura total transversal resultante se puede calcular según el modelo de la citada figura.

$$\theta_t = \arctan \frac{1.10}{0.325 - 0.125} = 79.69^\circ$$

$$T_{td} = \frac{7928.5}{\tan 79.69^\circ} = 1441.5 \text{ kN} \quad A_{st} = \frac{1441.5 \text{ kN}}{40 \text{ kN/cm}^2} = 36.0 \text{ cm}^2$$

Esta armadura deben distribuirse en la zona de contacto  $x = 4.47 \text{ m}$ .

$$A_{st} = \frac{36.0}{4.47} = 8.05 \text{ cm}^2 / \text{ml}$$

Este valor corresponde a la cuantía media, por ser la distribución de tensiones de compresión en la pantalla de tipo triangular (ver figura EC4.3), en la zona de mayor  $\sigma_{cd}$  será necesario el doble de armadura, que la calculada anteriormente.

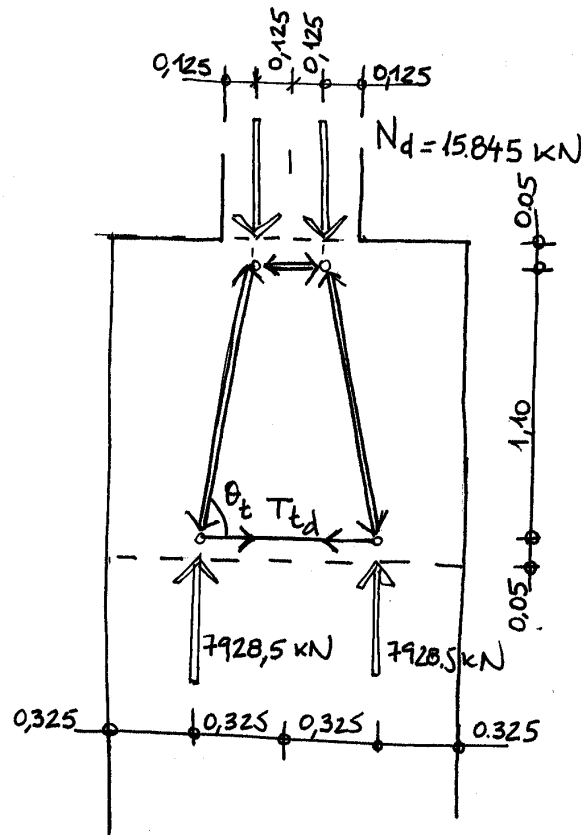


Figura EC4.18

#### 4º DISEÑO DE LA ARMADURA

Se diseña una armadura envolvente de las dos posibilidades (hipótesis A y B)

Según los mecanismos de las figuras EC4.4 y EC4.11

Hipótesis A) Sin tracción

$$\begin{aligned}T_{1d} &= 5412 \text{ kN} \\ T_{2d} &= 3225 \text{ kN}\end{aligned}$$

Hipótesis B) Con tracción

$$\begin{aligned}T_{1d} &= 5244 \text{ kN} \\ T_{2d} &= 2647 \text{ kN}\end{aligned}$$

$$T_{dmax} = 5412 \text{ kN}$$

$$A_s = \frac{5412}{40} = 135.3 \text{ cm}^2 \quad 17\phi 32 \text{ o bien } 28\phi 25$$

Armadura superior  $T_{5d} = 115 \text{ kN}$

$$T_{dmax} = 115 \text{ kN}$$

$$A_s = \frac{115}{40} = 2.9 \text{ cm}^2$$

En la dirección transversal se dispone  $A_s = 16.1 \text{ cm}^2/\text{ml} \rightarrow \phi 16 \text{ a } 0.125$ .

Se dispone además la armadura de piel indicada en la figura EC4.19.

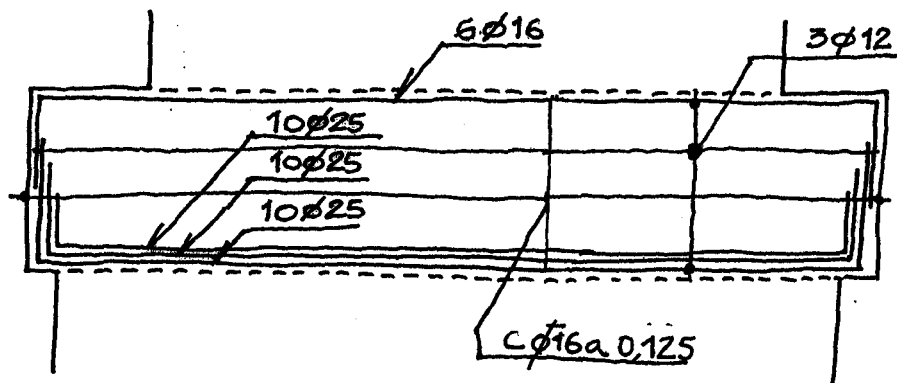


Figura EC4.19

#### 5º COMPROBACION DE LOS NUDOS

No es necesario comprobar los nudos, ya que son sólo fruto de la discretización utilizada.

**EE.1. Ménsula corta**

Sea la ménsula corta de la figura EE1.1, que forma parte del pórtico indicado en la figura EE1.2.

En la construcción del pilar se emplea hormigón H-25 y acero B500S con control normal, por lo que  $\gamma_c=1.50$   $\gamma_s=1.15$ .

Se desea dimensionar la armadura y comprobar la ménsula por el método de bielas y tirantes.

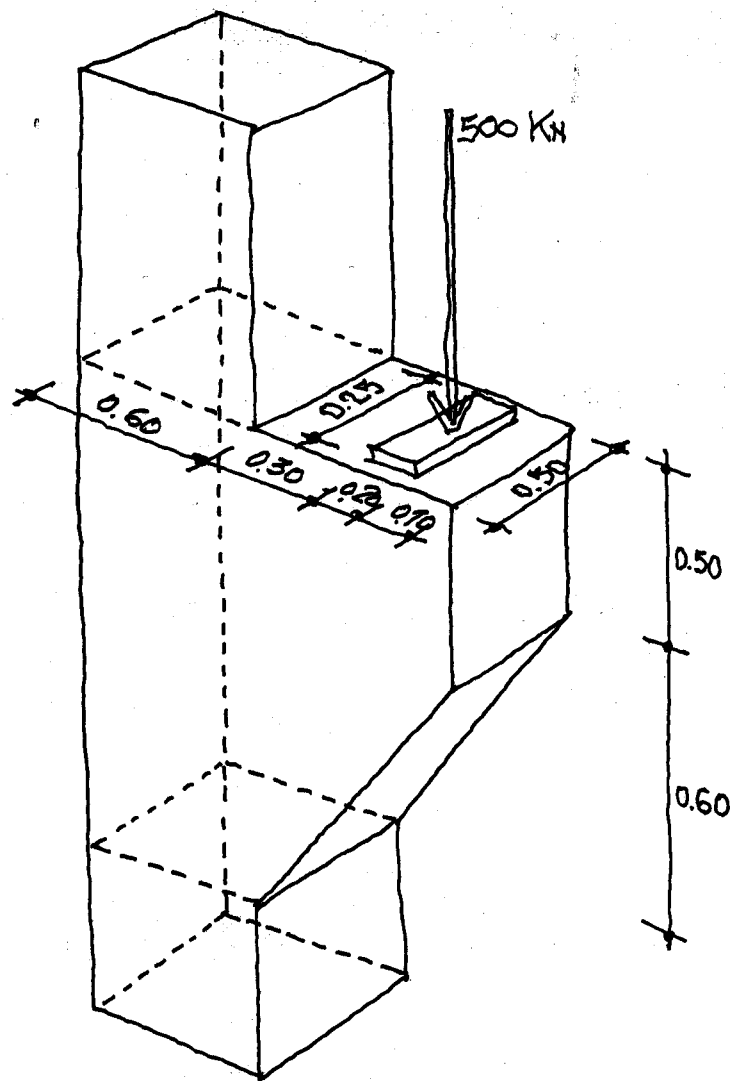


Figura EE1.1



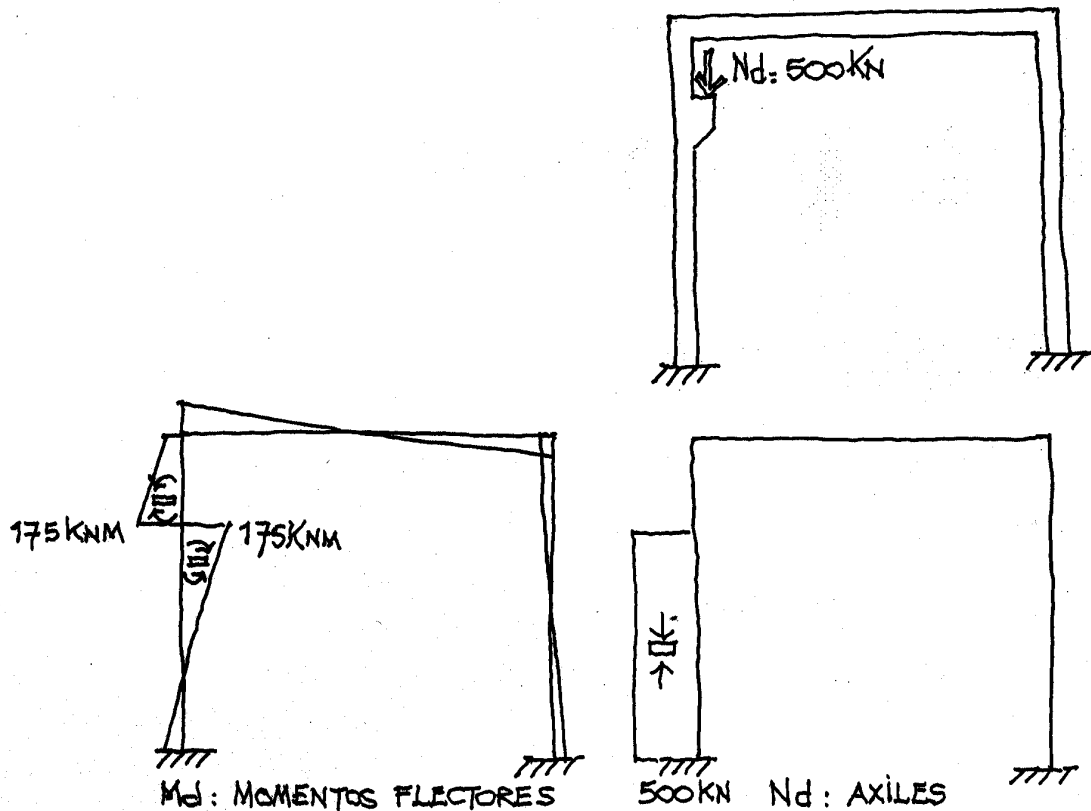


Figura EE1.2

Los resultados del cálculo global de esfuerzos, con valores de cálculo, son los indicados en la figura EE1.2.

### 1º PLANTEAMIENTO DEL MECANISMO RESISTENTE

En primer lugar se comprueba el equilibrio entre las cargas exteriores y los esfuerzos en las fronteras de la región D: figura EE1.3

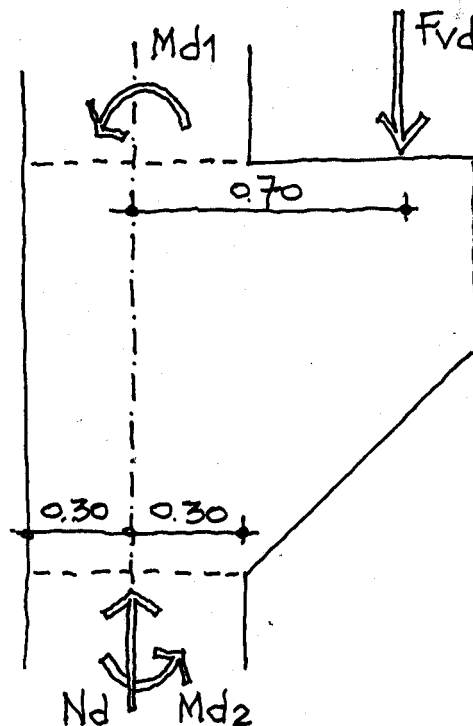


Figura EE1.3

$$F_{vd} = 500 \text{ kN}$$

$$N_d = F_{vd} = 500 \text{ Kn por equilibrio de cargas verticales}$$

$$M_{d1} + M_{d2} = F_{vd} \cdot 0.70 \text{ por equilibrio de momentos}$$

Del cálculo global (ver figura EE1.2)  $M_{d1} = M_{d2} = 175 \text{ kNm}$

Se comprueba el equilibrio:

$$2 \cdot 175 = F_{vd} \cdot 0.70 = 500 \cdot 0.70 = 350 \text{ kN: Se cumple}$$

Se transforman a continuación los momentos flectores en la frontera del elemento en fuerzas de compresión y tracción equivalentes (figura EE1.4)

Zona superior:

$$C_{d1} = T_{d1} = \frac{M_{d1}}{0.50} = \frac{175}{0.50} = 350 \text{ kN}$$

Se comprueba que el brazo mecánico supuesto  $z=0.50 \text{ m}$  es correcto (figura EE1.4)

$$\sigma_{cd} \leq 0.85 \cdot f_{cd} = 0.85 \cdot \frac{25000}{1.50} = 14166 \text{ kN/m}^2$$

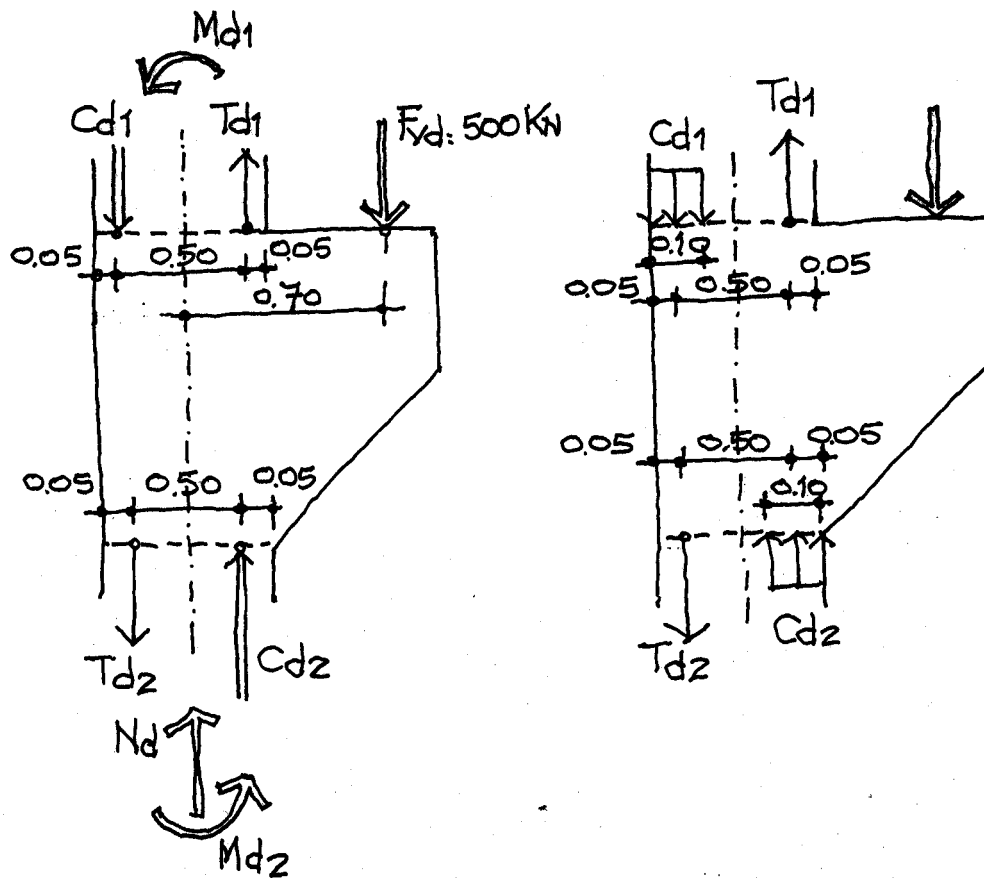


Figura EE1.4

$$\sigma_{cd1} = \frac{C_{d1}}{2 \cdot 0.05 \cdot 0.50} = \frac{350 \text{ kN}}{0.05 \text{ m}^2} = 7000 \text{ kN/m}^2 \leq 0.85 f_{cd}$$

Se determina la armadura del pilar en su parte superior.

$$A_{s1} = \frac{T_{d1}}{\frac{51}{1.15}} = \frac{350 \text{ kN}}{\frac{51}{1.15} \text{ kN/cm}^2} = 7.89 \text{ cm}^2 \quad \text{Se disponen } 3\phi 20$$

Zona inferior:

Análogamente, por equilibrio

$$C_{d2} - T_{d2} = N_d = 500 \text{ kN}$$

$$(C_{d2} + T_{d2}) \cdot 0.25 = M_{d2} = 175 \text{ kN}$$

$$\text{Operando } C_{d2} = 600 \text{ kN} \quad T_{d2} = 100 \text{ kN}$$

$$\sigma_{cd2} = \frac{600}{2 \cdot 0.05 \cdot 0.50} = 12000 \text{ kN/m}^2 \leq 0.85 f_{cd}$$

$$A_{s2} = \frac{100 \text{ kN}}{\frac{51}{1.15} \text{ kN/cm}^2} = 2.25 \text{ cm}^2 \quad \text{Se disponen } 3\phi 20 \text{ para mantener la simetría del pilar}$$

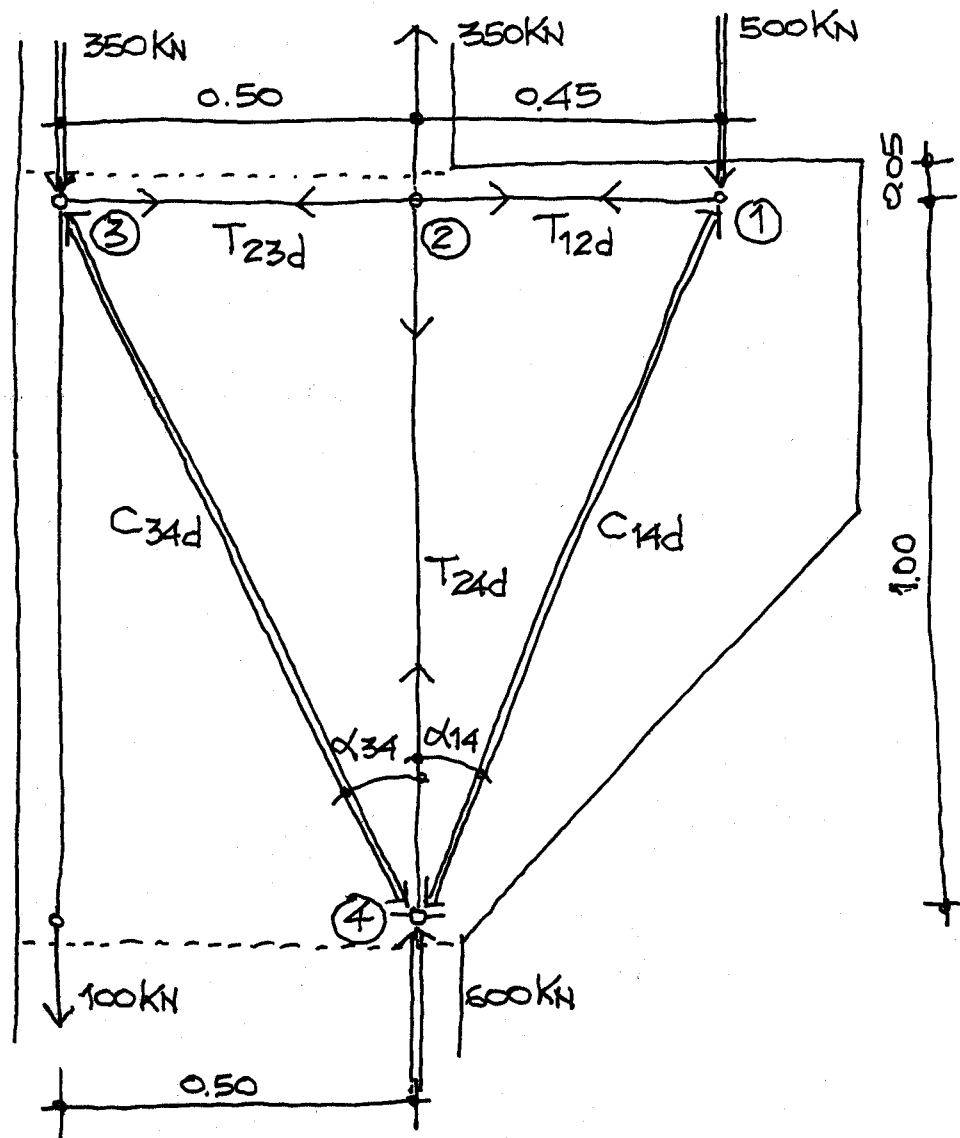


Figura EE1.5

El modelo indicado en la figura EE1.5 se ha elegido de forma que los ángulos agudos mínimos formados por bielas y tirantes estén entre  $22^\circ$  y  $45^\circ$ . Según la figura:

$$\alpha_{14} = \arctg \frac{0.45}{1.00} = 24.23^\circ$$

$$\alpha_{34} = \arctan \frac{0.50}{1.00} = 26.57^\circ$$

De acuerdo con la instrucción EHE-98 el ángulo mínimo  $\alpha_{14} = \arctan 1.40 = 35.5^\circ$  no obstante para el desarrollo del ejemplo se ha utilizado  $\alpha_{14} = 24.2^\circ$

Se compara el modelo de bielas y tirantes con los resultados obtenidos en un modelo de elementos finitos en régimen elástico y lineal (figura EE1.6)

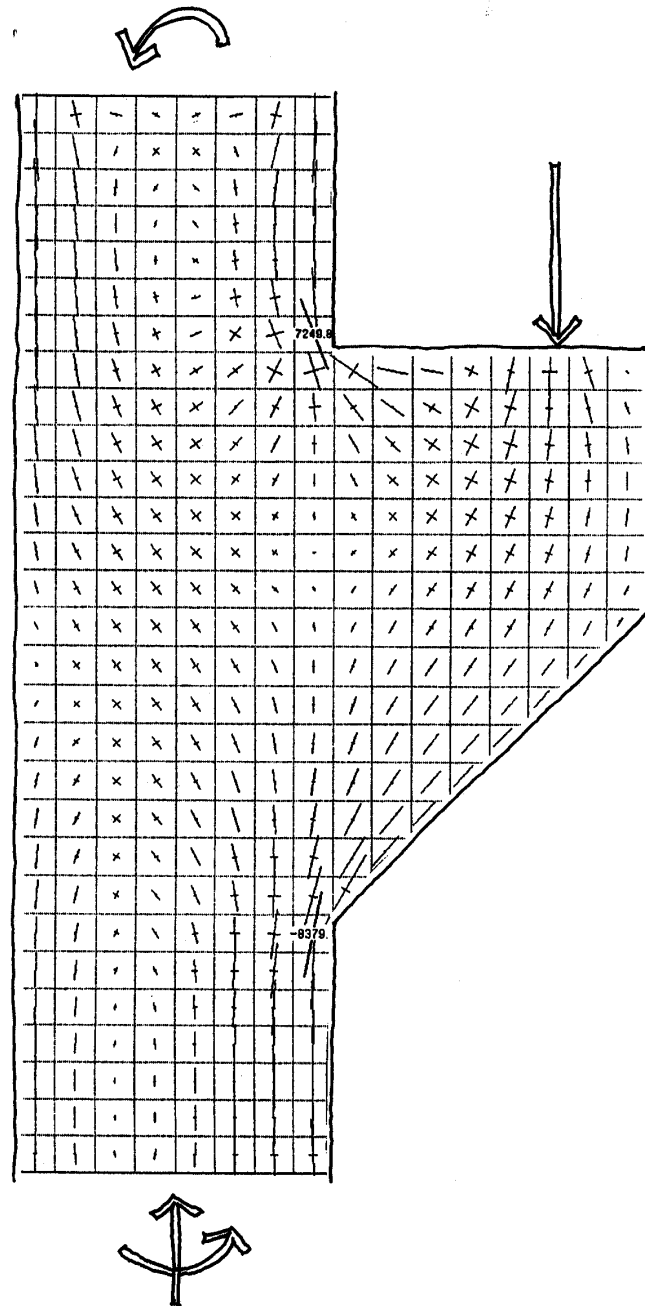


Figura EE1.6

Tal como puede observarse las tensiones principales de tracción en régimen elástico no siguen dos direcciones perpendiculares.

Para que el detalle sea constructivo, se adopta la disposición de armaduras que está representada en el modelo de la figura EE1.5 ya que al producirse la fisuración (controlada) las tracciones se reorientarán según las direcciones de la armadura.

## 2º OBTENCIÓN DE ESFUERZOS Y COMPROBACIÓN DEL EQUILIBRIO

### Nudo 1

Por equilibrio (ver figura EE1.7)

$$\frac{T_{12d}}{500} = \frac{0.45}{1.00} \Rightarrow T_{12d} = 225 \text{ kN}$$

$$C_{14d} = \sqrt{T_{12d}^2 + 500^2} = 548.3 \text{ kN}$$

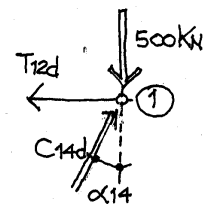


FIGURA EE 1-7

### Nudo 2

Por equilibrio (ver figura EE1.8)

$$T_{23d} = T_{12d} = 225 \text{ kN}$$

$$T_{24d} = 350 \text{ kN}$$

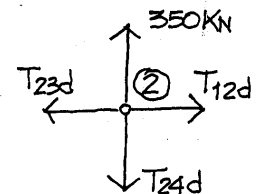


FIGURA EE 1-8

### Nudo 3

Por equilibrio (ver figura EE1.9)

$$C_{34d} = \frac{350 + 100}{\cos \alpha_{34}} = 503.1 \text{ kN}$$

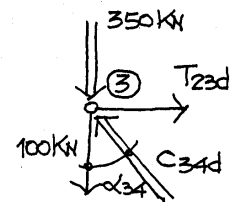


FIGURA EE 1-9

### Nudo 4

Se comprueba el equilibrio (figura EE1.10)

$$C_{34d} \cdot \sin \alpha_{34} - C_{14d} \cdot \sin \alpha_{14} = 503.1 \cdot \sin 26.57^\circ - 548.3 \cdot \sin 24.23^\circ = 0$$

$$C_{34d} \cos \alpha_{34} + C_{14d} \cos \alpha_{14} - 350 = 600 \text{ kN} \quad \text{Cumple}$$

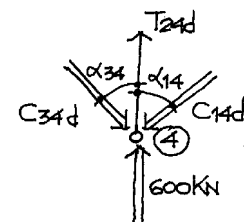


FIGURA EE 1-10

### 3º DISEÑO DE LA ARMADURA

Se limita la tensión a  $40 \text{ kN/cm}^2$  para controlar indirectamente la fisuración:

$$A_{12} = A_{23} = \frac{T_{d12}}{40 \text{ kN/cm}^2} = \frac{225}{40} = 5.625 \text{ cm}^2 \quad -> \quad \text{Se disponen } 4\phi 16$$

### 4º COMPROBACIÓN DE NUDOS

#### Nudo 1

En este nudo se ancla la armadura  $A_{12}$  (figura EE1.11)

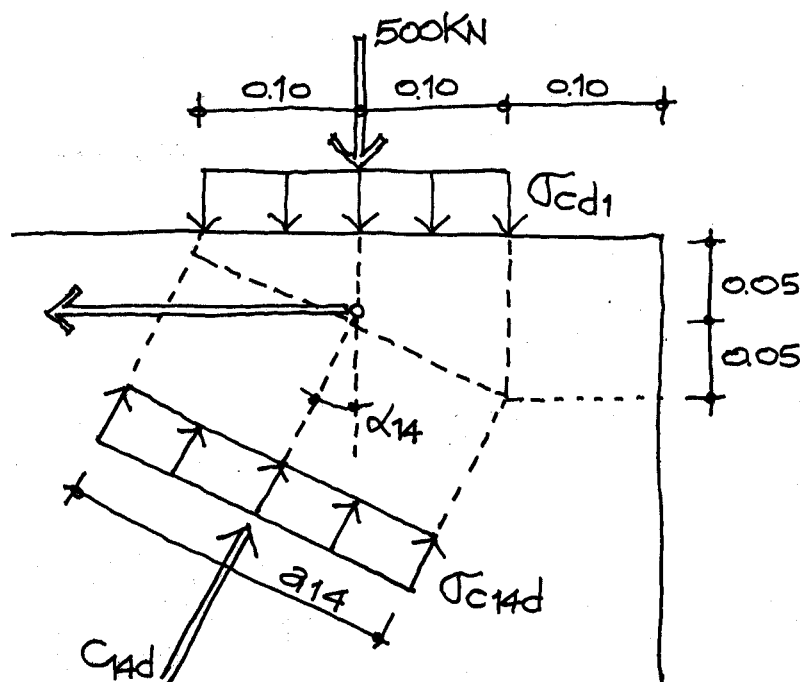


Figura EE1.11

Por anclarse tirantes en el nudo se limita la tensión de compresión en el hormigón a  $\sigma_{cd} \leq 0.70 \cdot f_{cd}$

Con un ancho de apoyo de 0.25 m

$$\sigma_{cd1} = \frac{500 \text{ kN}}{0.20 \cdot 0.25} = 10000 \text{ kN/m}^2 \leq 0.70 f_{cd} = 11666 \text{ kN/m}^2 \quad \text{Cumple}$$

Como  $a_{14} = 0.20 \cos \alpha_{14} + 0.10 \cdot \sin \alpha_{14} = 0.223 \text{ m}$ , resulta:

$$\text{con } \alpha_{14} = 24.23^\circ$$

$$\sigma_{c14d} = \frac{548.3 \text{ kN}}{0.223 \cdot 0.25 \text{ m}^2} = 9835 \text{ kN/m}^2 \leq 0.70 f_{cd} \quad \text{Cumple}$$

Además de comprobar la compresión en el hormigón, debe asegurarse que la armadura esté suficientemente anclada.

Anclaje de la armadura:

$L_{bII} = 1.4 \text{ m} \cdot \phi^2 = 1.4 \cdot 15 \cdot 1.6^2 = 54 \text{ cm}$ . Como la armadura dispuesta ( $4\phi 16$ ) es superior a la necesaria ( $5.63 \text{ cm}^2$ ) y con una barra transversal soldada (figura EE1.12), se puede reducir la longitud de anclaje a  $L_{bnec} = 54 \cdot \frac{5.63}{8.04} \cdot 0.70 = 26 \text{ cm}$

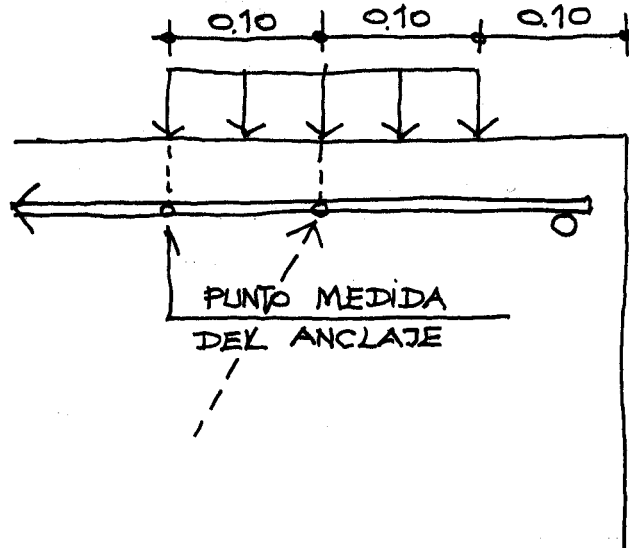


Figura EE1.12

### Nudo 2

En él tan sólo se cruza la armadura, no hay que comprobar las compresiones en el hormigón.

### Nudo 3

Por anclarse en él armadura, la tensión de compresión en el hormigón estará limitada a  $0.70 f_{cd}$ .

Para ello bastará con que la armadura tenga el radio de doblado suficiente (figura EE1.13).

$$R = 6 \phi = 6 \cdot 1.6 = 9.6 \text{ cm} \rightarrow 10 \text{ cm}$$



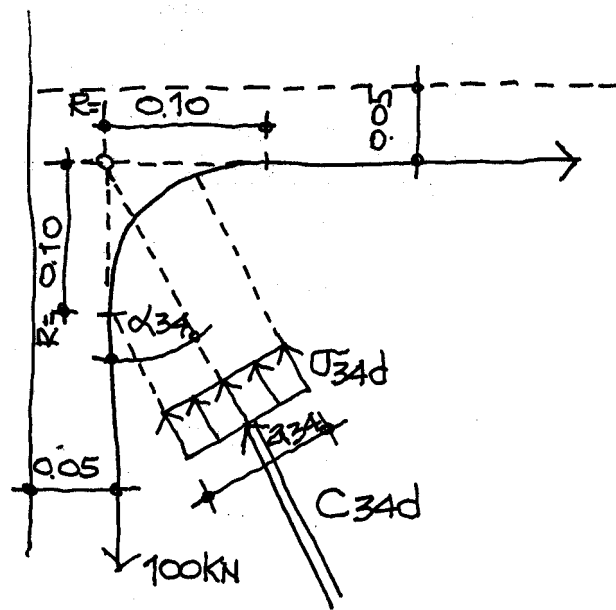


Figura EE1.13

En cualquier caso se comprueba la tensión en el hormigón:

Por geometría  $a_{34} = 2R \sin \alpha_{34} = 2 \cdot 0.10 \sin 26.57^\circ = 0.089 \text{ m}$

El ancho del nudo es igual al ancho del pilar  $b = 0.50$

$$\sigma_{34d} = \frac{C_{34d}}{a_{34} \cdot b} = \frac{503.1}{0.089 \cdot 0.50} = 11306 \leq 0.70 f_{cd} = 11666 \text{ kN/m}^2$$

Por otra parte hay que anclar la armadura correspondiente al tirante  $T_{23d}$ .

$l_{bl} = 15 \cdot 1.6^2 = 38 \text{ cm}$ . Por estar doblada la armadura en patilla se puede reducir esta longitud en un 30%.

Se prolongan hacia abajo los  $4\phi 16$  en una longitud de 30 cm (ver figura EE1.16)

#### Nudo 4

En el nudo se ancla la armadura  $A_{24}$ ; basta con que esté suficientemente anclada y con que la tensión en el hormigón esté por debajo de  $0.70 f_{cd}$ .

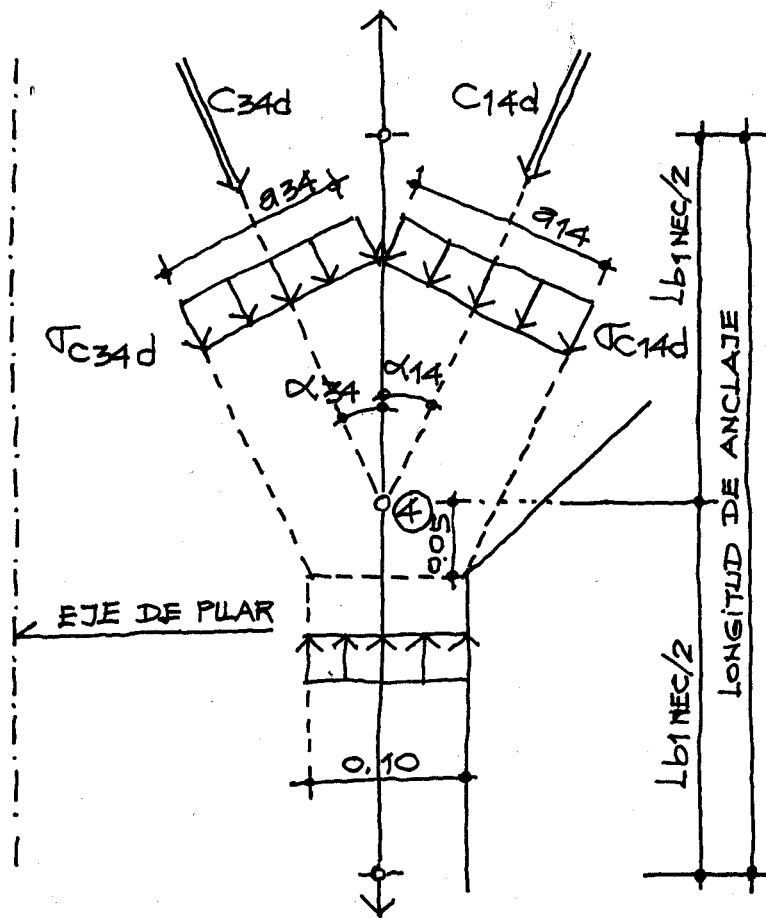


Figura EE1.14

La longitud de anclaje es:

$$l_{bl} = m \phi^2 = 15 \cdot 2.0^2 = 60 \text{ cm}$$

Armadura necesaria:  $7.89 \text{ cm}^2$ ; como la armadura dispuesta es  $3 \phi 20 = 9.42 \text{ cm}^2$  se puede reducir proporcionalmente la longitud necesaria:

$$l_{blnec} = 60 \cdot \frac{7.89}{9.42} = 50 \text{ cm}$$

Por geometría (figura EE1.14)

$$a_{14d} = 2 \cdot 0.05 (\sin \alpha_{14} + \cos \alpha_{14}) = 2 \cdot 0.05 (\sin 24.23^\circ + \cos 24.23^\circ) = 0.132 \text{ m}$$

$$a_{34d} = 2 \cdot 0.05 (\sin \alpha_{34} + \cos \alpha_{34}) = 2 \cdot 0.05 (\sin 26.57^\circ + \cos 26.57^\circ) = 0.134 \text{ m}$$

Entonces la tensión en el hormigón será:

$$\sigma_{C14d} = \frac{548.3}{0.132 \cdot 0.50} = 8307 \text{ kN/m}^2 \leq 0.70 f_{cd}$$

$$\sigma_{C34d} = \frac{503.1}{0.134 \cdot 0.50} = 7509 \text{ kN/m}^2 \leq 0.70 f_{cd} \quad \text{Cumple}$$

### 5º ARMADO

Además de la armadura principal calculada con el modelo de bielas y tirantes, se debe disponer una armadura secundaria (cercos), para coser las tracciones inducidas por la dispersión de la biela situada bajo el apoyo (figura EE1.15).

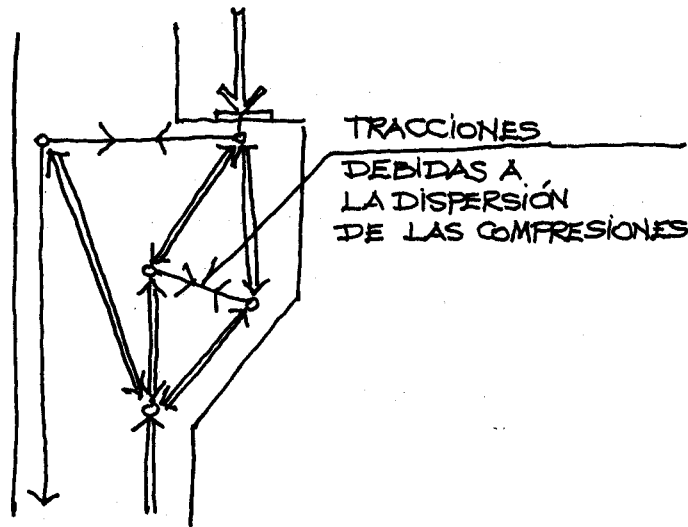


Figura EE1.15

La tracción a coser según EHE-98 es

$$T_d = 0.20 F_{vd} = 0.20 \cdot 500 = 100 \text{ kN}$$

$$A_s = \frac{100 \text{ kN}}{40 \text{ kN/cm}^2} = 2.50 \text{ cm}^2$$

$$\text{Se distribuyen en } \frac{2}{3} 1.05 = 0.70 \text{ m}$$

$$\text{Con } 4 \text{ c } \phi 8 \rightarrow A_s = 4.00 \text{ cm}^2 > 2.5 \text{ cm}^2$$

Se coloca además una armadura de piel en las caras de 0.60 m del pilar (1 $\phi$ 16 por cara), y 3 $\phi$ 12 en la zona de la ménsula (figura EE1.16)

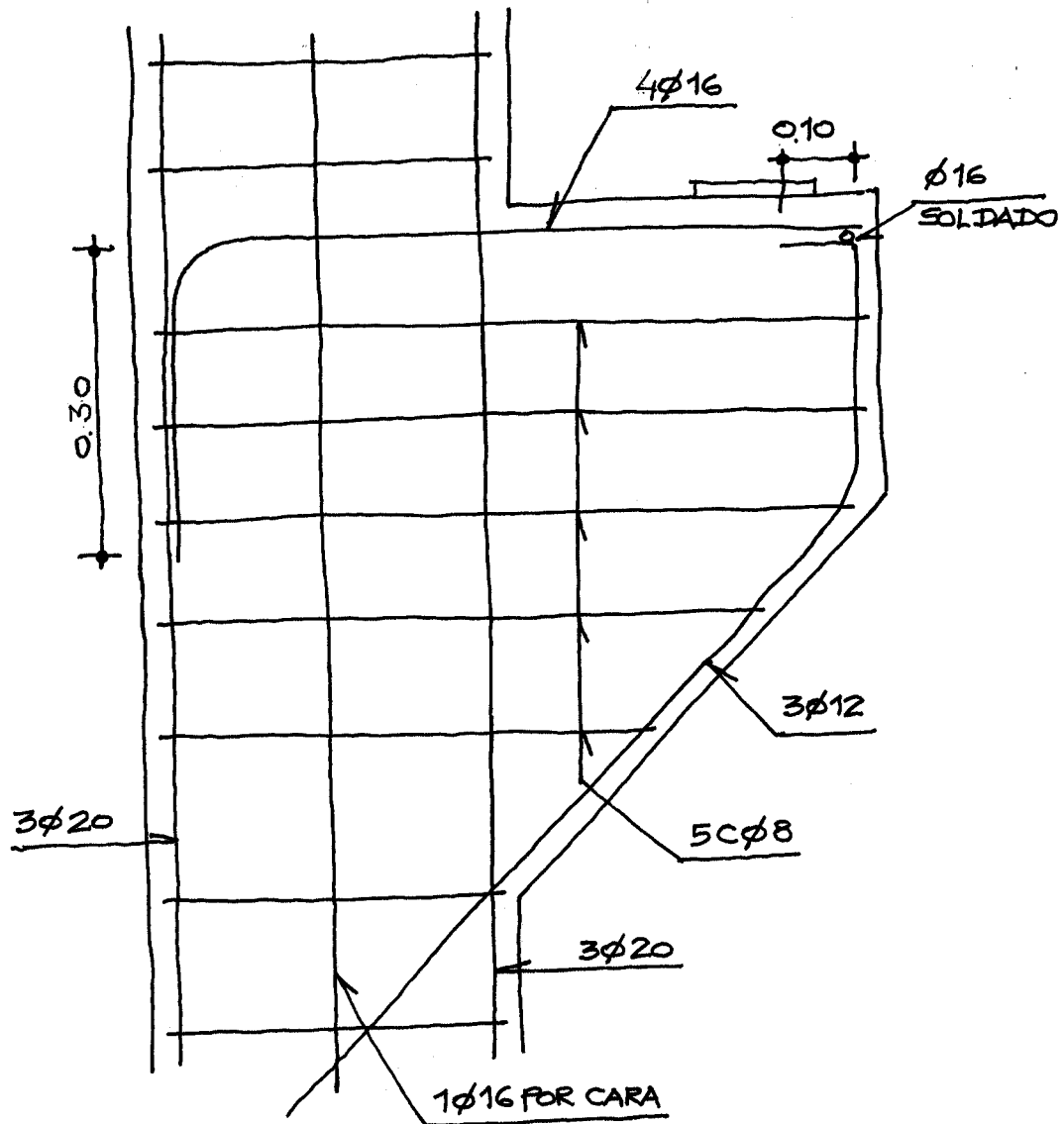


Figura EE1.16

**EE.2. Viga pared**

Sea la viga pared de la figura EE2.1 que puentea dos pilares que transmiten sendas cargas mayoradas de 1100 kN.

Como materiales se emplean hormigón H-25 y acero de armar B-500-S, con control normal, luego  $\gamma_s=1.50$  y  $\gamma_s=1.15$ . Se desea dimensionar la armadura y comprobar la viga pared por el método de bielas y tirantes.

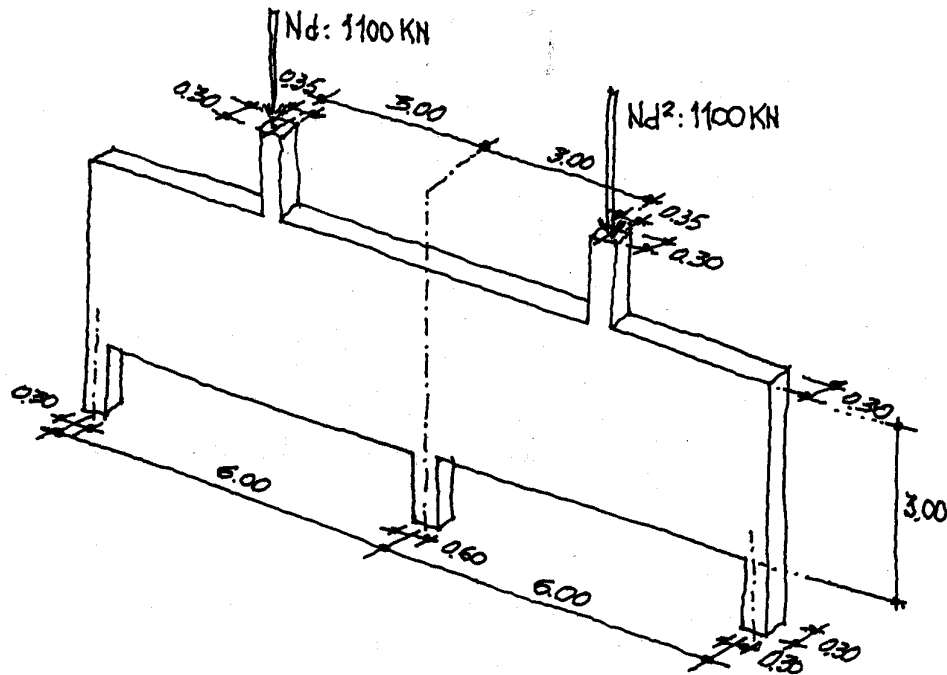


Figura EE2.1

### 1º PLANTEAMIENTO DEL MECANISMO RESISTENTE

Por tratarse de una estructura hiperestática se deben determinar en primer lugar las reacciones en los apoyos.

Para ello se realiza un cálculo elástico (como viga) en el que se obtienen las reacciones indicadas en la figura EE2.2. En el cálculo, además de las acciones transmitidas por los pilares superiores  $N_d=1100$  kN, se incluye el peso propio mayorado.

$$P_d = 3.00 \cdot 0.30 \cdot 25 \text{ kN/m}^3 \cdot 1.50 = 33.75 \text{ kN/m}$$

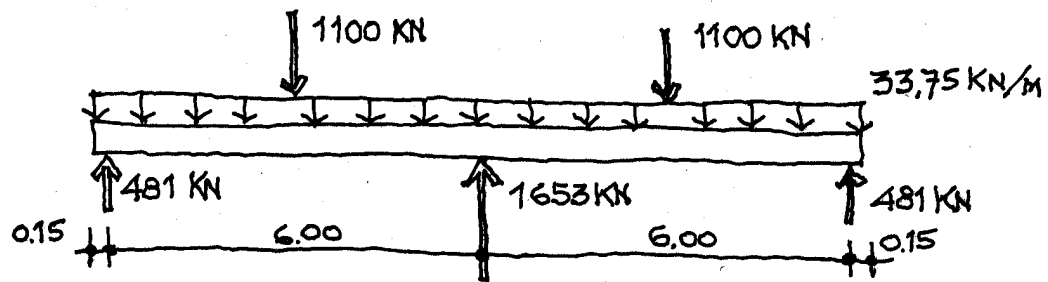


Figura EE2.2

Conocidas las reacciones se puede plantear un sistema hiperestático como el indicado en la figura EE2.3, que se compara con el obtenido con un modelo elástico y lineal (sobre el que se han calculado las reacciones anteriores): figura EE2.4

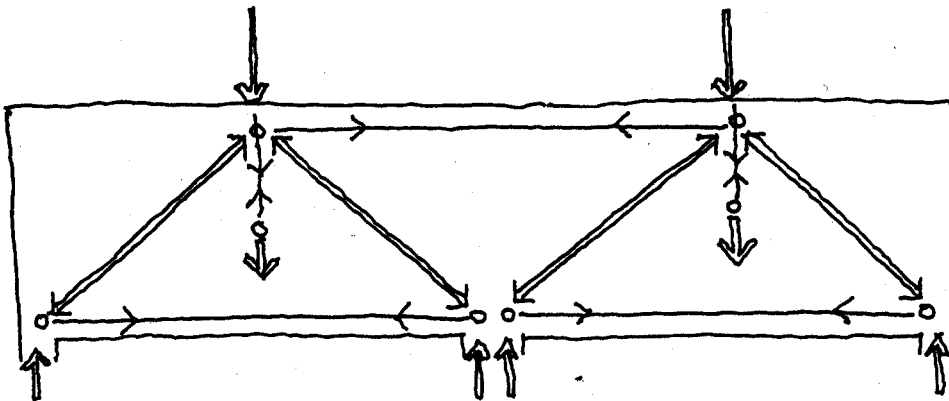


Figura EE2.3

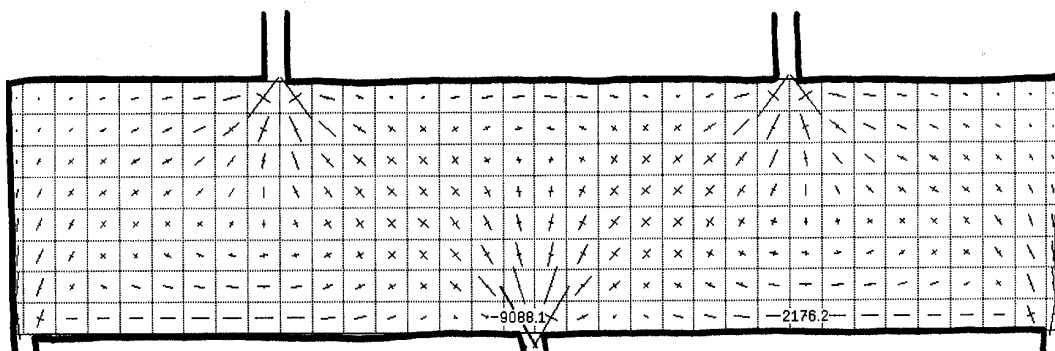


Figura EE2.4.

Para la resolución del sistema hiperestático de la figura EE2.3, éste se descompone en los dos sistemas isotáticos "1" y "2" indicados en la figura EE2.5, cuya "suma" equivale al sistema completo de la figura EE2.3.

Esto equivale a suponer que parte de las cargas ( $P_{1d}$ ) se transmiten según el mecanismo del modelo "1" de la figura EE2.5, y el resto  $1307,5 - P_{1d}$  según el mecanismo "2" de la citada figura.

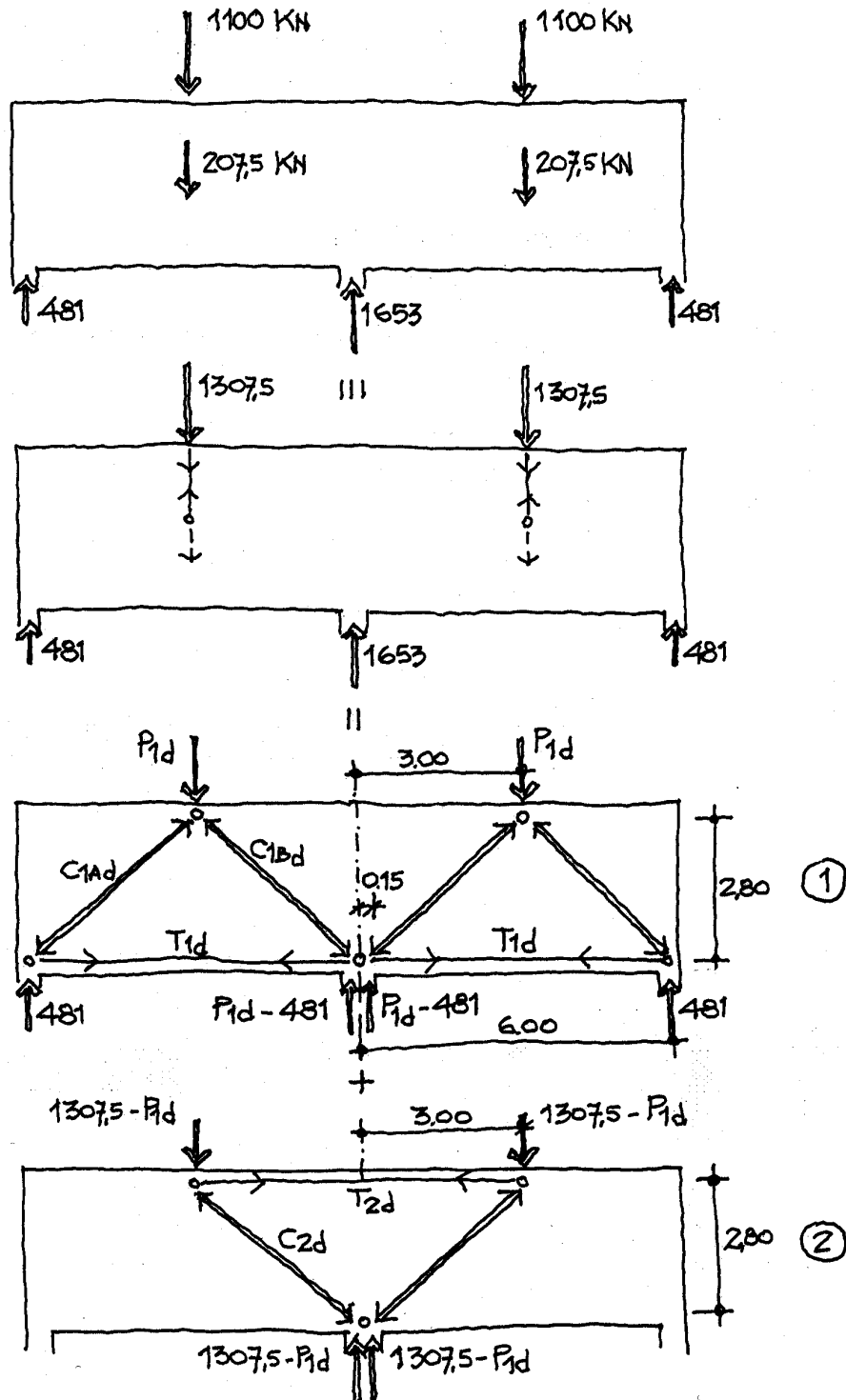


Figura EE2.5



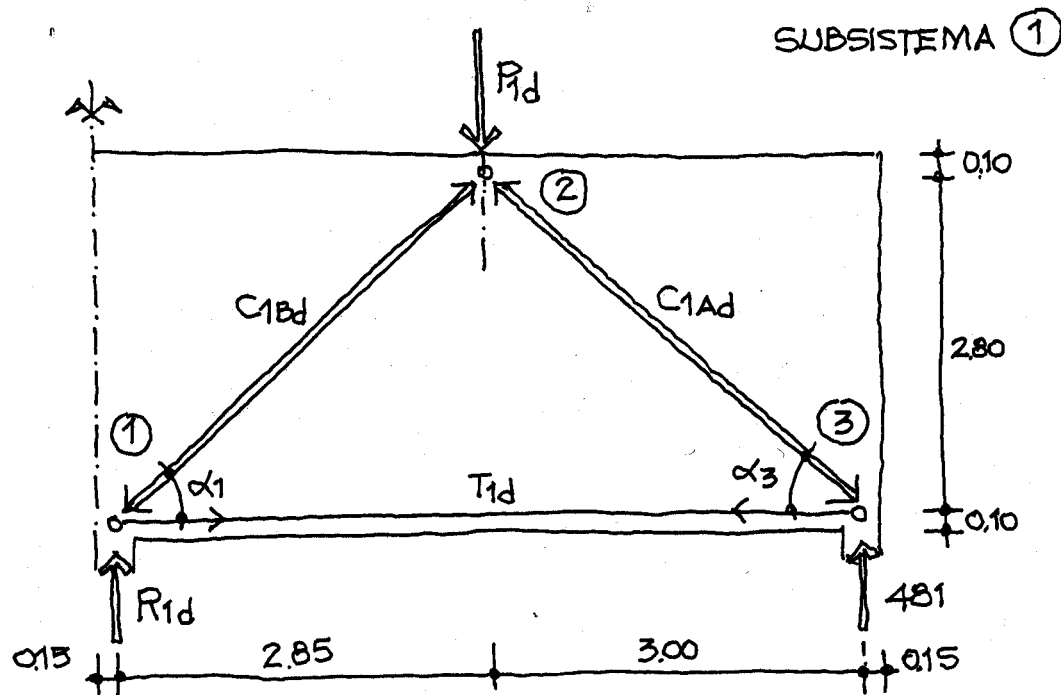


Figura EE2.6

En la figura EE2.6 se analiza el sistema "1".

Si se toman momentos respecto al punto 1:

$$P_{1d} \cdot 2.85 = 481 \cdot 5.85 \rightarrow P_{1d} = 987.3 \text{ kN} \rightarrow R_{1d} = 987.3 - 481 = 506.3 \text{ kN}$$

Conocidos  $P_{1d}$  y  $R_{1d}$  se puede establecer el mecanismo resistente indicado en la figura EE2.7.

La suma de los dos subsistemas indicados en EE2.7 proporciona el sistema resultante.

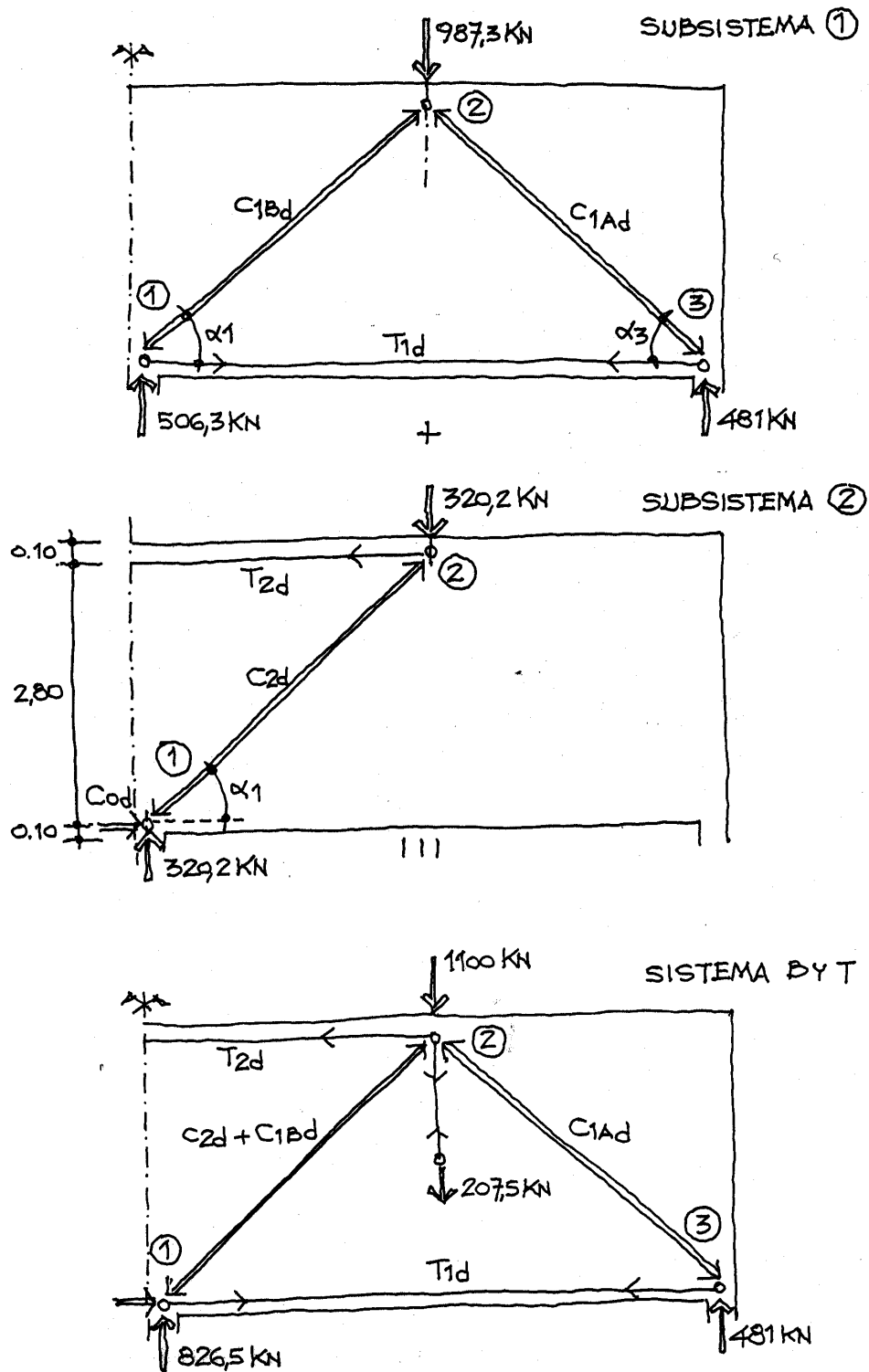


Figura EE2.7

## 2º OBTENCIÓN DE ESFUERZOS Y COMPROBACIÓN DEL EQUILIBRIO

Por simplicidad, se resuelve cada subsistema independiente.

### SUBSISTEMA 1

#### Nudo 1

Por geometría:

$$\alpha_1 = \arctan \frac{2.80}{2.85} = 44.49^\circ \text{ (figura EE2.6)}$$

De la figura EE2.8

$$T_{1d} = \frac{506.3}{\tan \alpha_1} = 515.4 \text{ kN}$$

$$C_{1Bd} = \sqrt{506.3^2 + T_{1d}^2} = 722.5 \text{ kN}$$

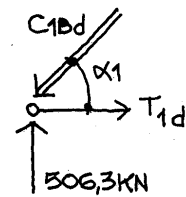


FIGURA EE 2-8

#### Nudo 2

Por geometría:

$$\alpha_3 = \arctan \frac{2.80}{3.00} = 43.03^\circ$$

De la figura EE2.9

$$C_{1Ad} = \frac{722.5 \cos \alpha_1}{\cos \alpha_3} = 705.1 \text{ kN}$$

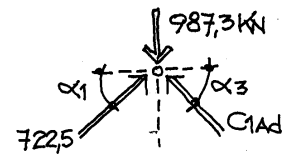


FIGURA EE 2-9

#### Nudo 3

Comprobación del equilibrio (figura EE2.10)

$$C_{1Ad} \cdot \sin \alpha_3 = 705.1 \cdot \sin 43.033 = 481 \text{ kN} \rightarrow \text{cumple}$$

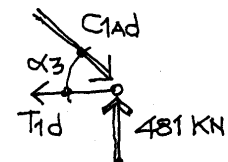


FIGURA EE 2-10

## SUBSISTEMA 2

### Nudo 1

De la figura EE2.11

$$C_{2d} = \frac{320.2}{\sin \alpha_1} = 456.9 \text{ kN}$$

$$C_{0d} = 456.9 \cos \alpha_1 = 325.94$$

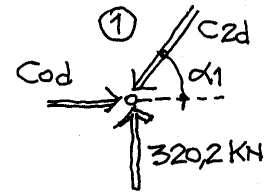


FIGURA EE 2-11

### Nudo 2

Se comprueba el equilibrio según la figura EE2.11

$$C_{2d} \cdot \sin \alpha_1 = 456.9 \sin 44.49^\circ = 320.2 \text{ kN Cumple}$$

$$T_{2d} = C_{2d} \cos \alpha_1 = C_{0d} = 325.94 \text{ kN}$$

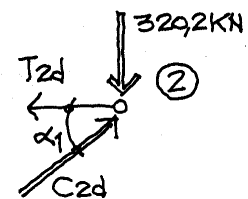


FIGURA E 2-11

En la figura EE2.12 se indica el sistema completo suma de los subsistemas anteriores.

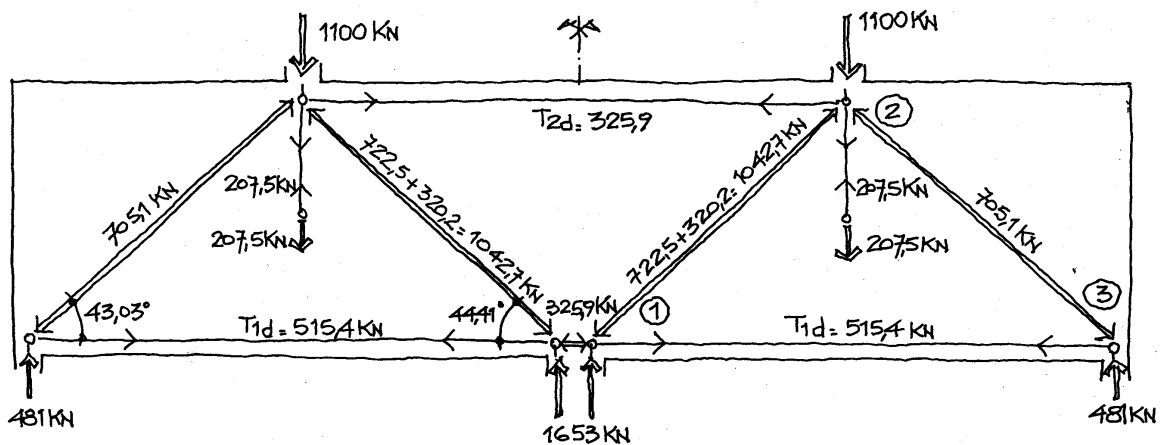


Figura EE2.12

## 3º DISEÑO DE LA ARMADURA

Limitando la tensión en la armadura a  $40 \text{ kN/cm}^2$  para controlar la fisuración:

$$T_{1d} = 515.4 \text{ kN} \rightarrow A_1 = \frac{515.4}{40} = 12.9 \text{ cm}^2 \rightarrow 2 \text{ capas } 4\phi 16$$

$$T_{2d} = 325.9 \text{ kN} \rightarrow A_2 = \frac{325.9}{40} = 8.1 \text{ cm}^2 \rightarrow 2 \text{ capas } 3\phi 16$$

#### 4º COMPROBACIÓN DE NUDOS

##### Nudo 1

En este nudo, como no es necesario anclar el tirante (la armadura pasa), se limite la tensión en el hormigón a  $f_{cd}$ .

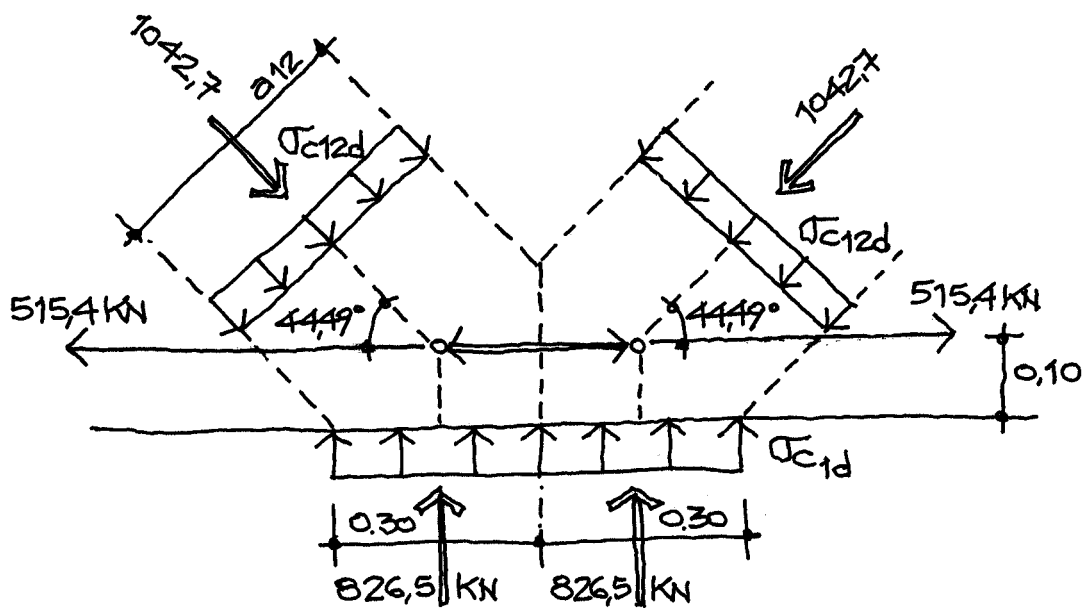


Figura EE2.13

$$f_{cd} = \frac{25000}{1.5} = 16.666 \text{ kN/m}^2$$

Por geometría (figura EE2.13)  $a_{12} = 2 \cdot 0.10 \cdot \cos 44.49 + 0.30 \cdot \sin 44.49 = 0.35 \text{ m}$

Con un ancho igual al del pilar de apoyo, que es igual al de la viga  $b=0.30 \text{ m}$ , la tensión de compresión en el hormigón será:

$$\sigma_{c12d} = \frac{1042.7}{0.35 \cdot 0.30} = 9930 \text{ kN/m}^2 \leq f_{cd} \text{ Cumple}$$

$$\sigma_{c1d} = \frac{2 \cdot 826.5}{0.60 \cdot 0.30} = 9183 \text{ kN/m}^2 \leq f_{cd} \text{ Cumple}$$

## Nudo 2

Por anclarse en él armadura, la tensión de compresión máxima en el hormigón se limita a  $0.70 f_{cd} = 11666 \text{ kN/m}^2$

Por geometría del nudo:

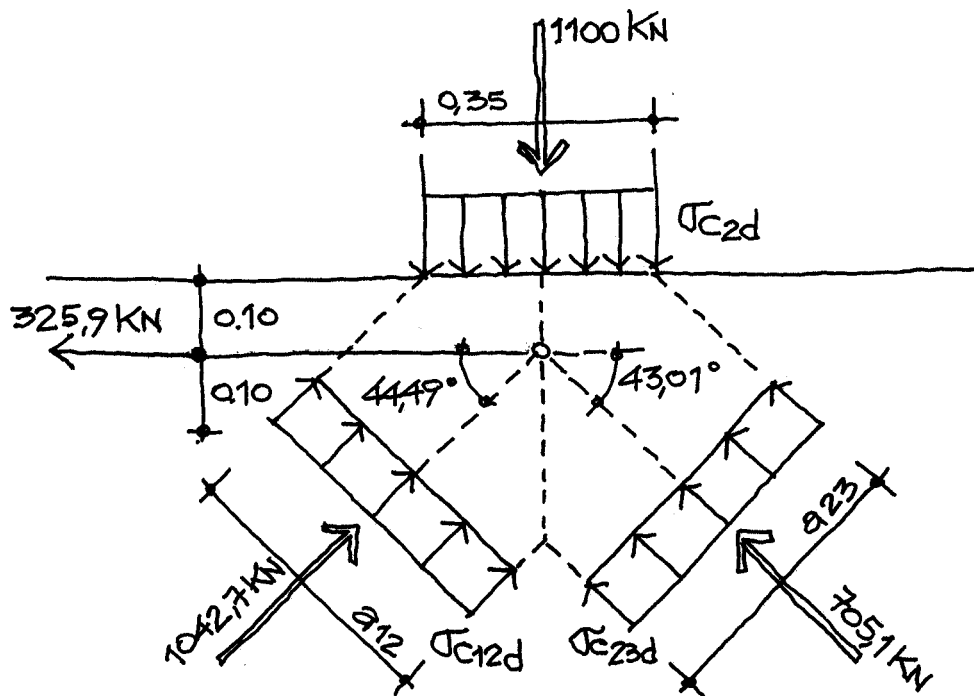


Figura EE2.14

$$a_{12} = 2 (0.175 \sin 44.49^\circ + 0.10 \cos 44.49^\circ) = 0.39 \text{ m}$$

$$a_{23} = 2 (0.175 \sin 43.01^\circ + 0.10 \cos 43.01^\circ) = 0.39 \text{ m}$$

Con un ancho igual al de la viga y pilar  $b=0.30 \text{ m}$

$$\sigma_{c12d} = \frac{1042.7}{0.39 \cdot 0.30} = 8912 \text{ kN/m}^2 \leq 0.70 f_{cd}$$

$$\sigma_{c23d} = \frac{705.1}{0.39 \cdot 0.30} = 6026 \text{ kN/m}^2 \leq 0.70 f_{cd}$$

$$\sigma_{c2d} = \frac{1100}{0.35 \cdot 0.30} = 10476 \text{ kN/m}^2 \leq 0.70 f_{cd}$$

### Nudo 3

Por anclarse armadura en el nudo, la tensión en el hormigón se limita a  $0.70 f_{cd} = 11666 \text{ kN/m}^2$ .

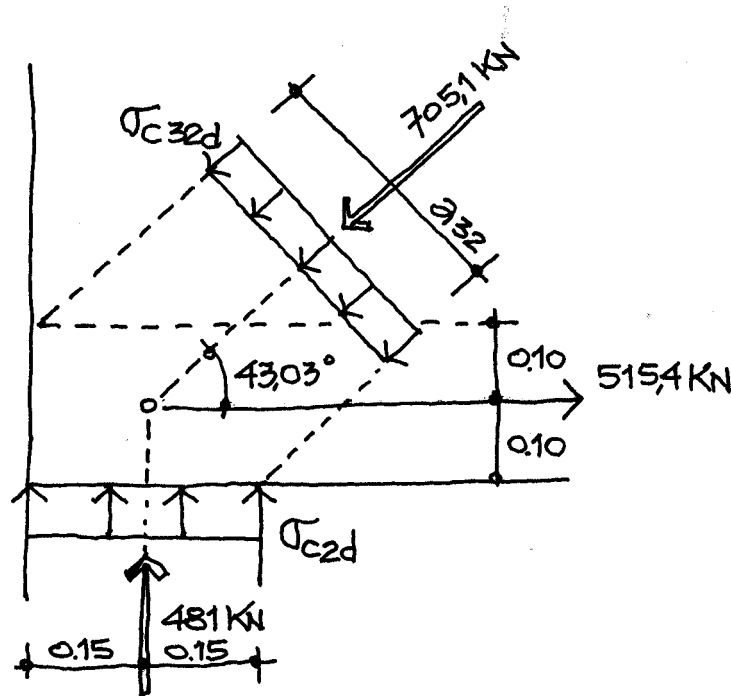


Figura EE2.15

Por geometría  $a_{32} = 2 (0.10 \cos 43.03^\circ + 0.15 \sin 43.03^\circ) = 0.35 \text{ m}$

El ancho del nudo coincide con el pilar y viga  $b=0.30 \text{ m}$ . La tensión en el hormigón es:

$$\sigma_{c23d} = \frac{705.1}{0.35 \cdot 0.30} = 6715 \text{ kN/m}^2 \leq 0.70 f_{cd} \quad \text{Cumple}$$

$$\sigma_{c2d} = \frac{515.40}{0.20 \cdot 0.30} = 8590 \text{ kN/m}^2 \leq 0.70 f_{cd} \quad \text{Cumple}$$

Para materializar el anclaje de la armadura, como no hay longitud suficiente, se suelda la armadura a una chapa (figura EE2.16).

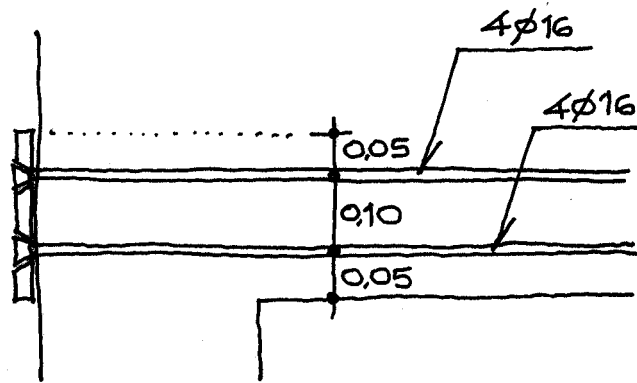


Figura EE2.16

### 5º ARMADO

Además de la armadura principal calculada anteriormente es necesario “colgar” el peso propio:

$$T_d = 2 \cdot 207.5 = 415 \text{ kN}$$

$$A_s = \frac{415}{40} = 10.375 \text{ cm}^2 \text{ en } 12\text{m} \quad \text{luego} \quad A_s = 0.86 \text{ cm}^2 / \text{m}$$

Con la cuantía mínima es suficiente.

Se dispone una cuantía geométrica mínima de valor 0.15% por dirección y cara.

$$A_s = \frac{0.15}{100} \cdot 30 \cdot 100 = 4.5 \text{ cm}^2 / \text{m} \longrightarrow \phi 12 \text{ a } 0.20$$

Resulta finalmente el armado que muestra la figura EE2.17



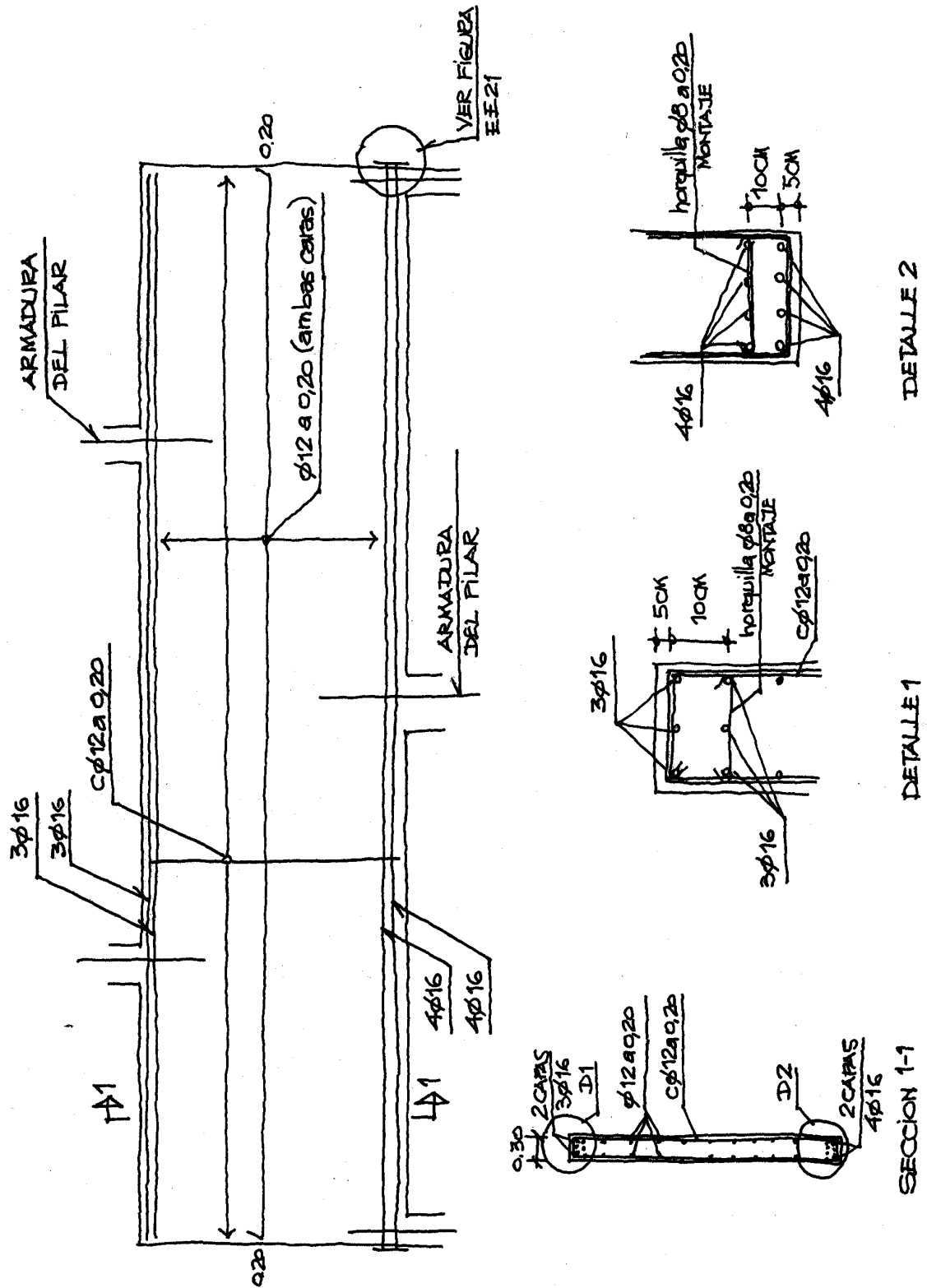


Figura EE.2.17

**EE.3. Viga con cambio de canto**

Sea la viga de la figura EE.3.1, que tiene un cambio de canto en la zona de centro de vano. En ese punto los esfuerzos de cálculo son  $M_d=90$  kNm y  $V_d=0$ .

Como materiales se emplean hormigón H-25 y acero de armar B-500-S con control normal, luego  $\gamma_c=1.50$  y  $\gamma_s=1.15$ .

Se desea diseñar el detalle por el método de bielas y tirantes.

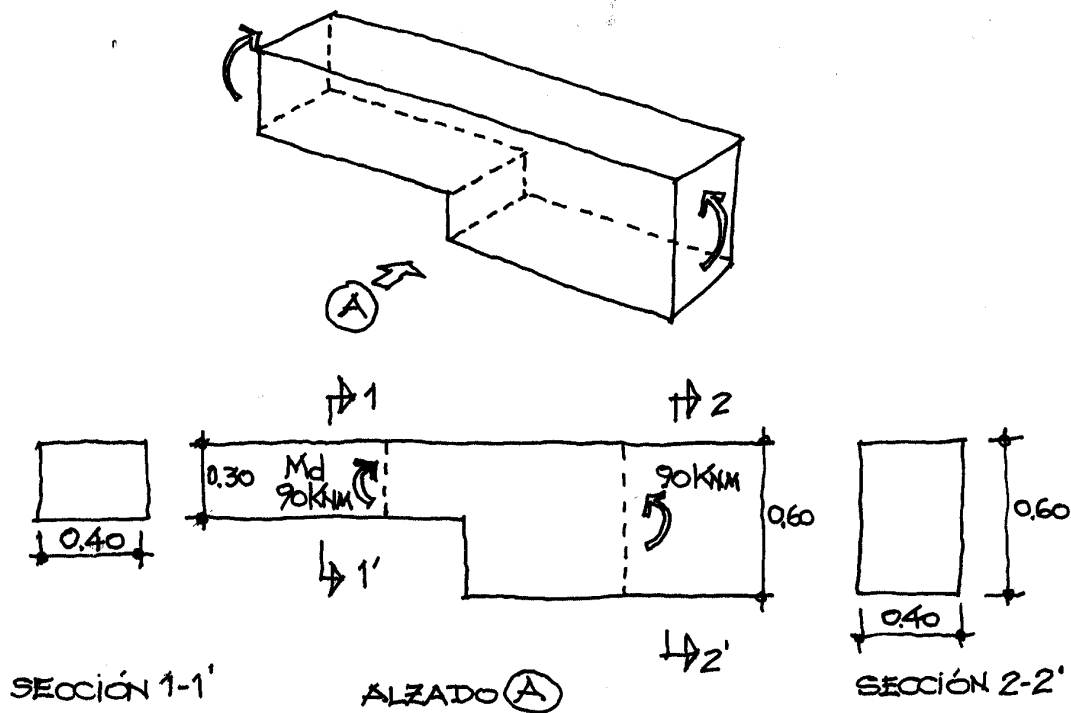


Figura EE3.1

### 1º PLANTEAMIENTO DEL MECANISMO RESISTENTE

Conocidos los momentos de frontera:  $M_d=90$  kNm se pueden calcular los pares (compresión-tracción) equivalentes. Ver figura EE.3.2

$$F_{2d} = \frac{90}{0.20} = 450 \text{ kN}$$

$$F_{1d} = \frac{90}{0.50} = 180 \text{ kN}$$

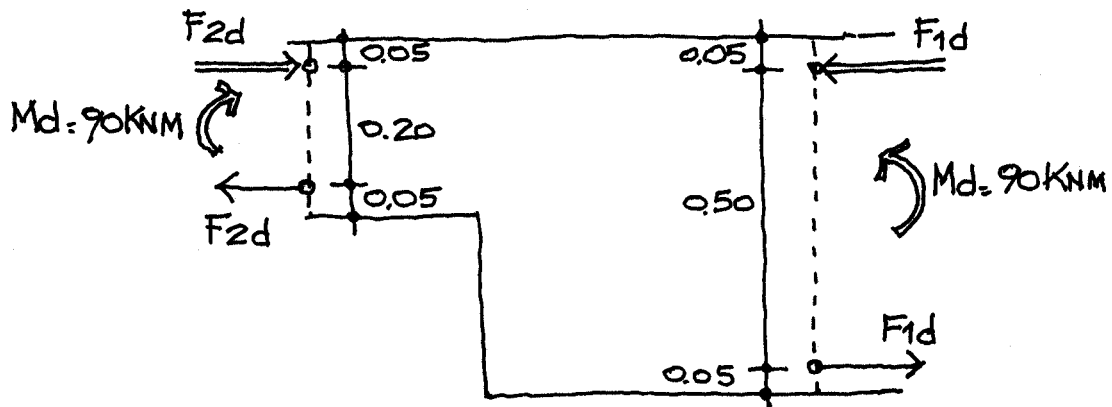


Figura EE3.2

Un posible sistema resistente el indicado en la figura EE.3.3, que se compara con el obtenido mediante un modelo de elementos finitos en régimen elástico (figura EE.3.4).

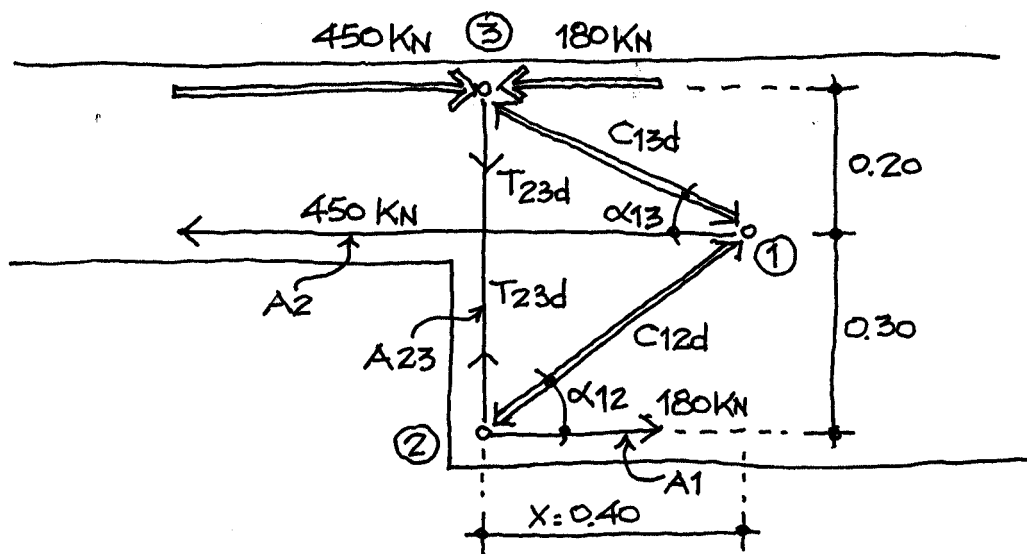


Figura EE3.3

Como se puede apreciar es difícil adaptarse a las tensiones principales de tracción. Se decide utilizar un sistema como el de la figura EE3.3, que sigue al menos parcialmente a las isolas de las tensiones principales y establece los tirantes según direcciones verticales y horizontales, lo que facilita la colocación de armadura .

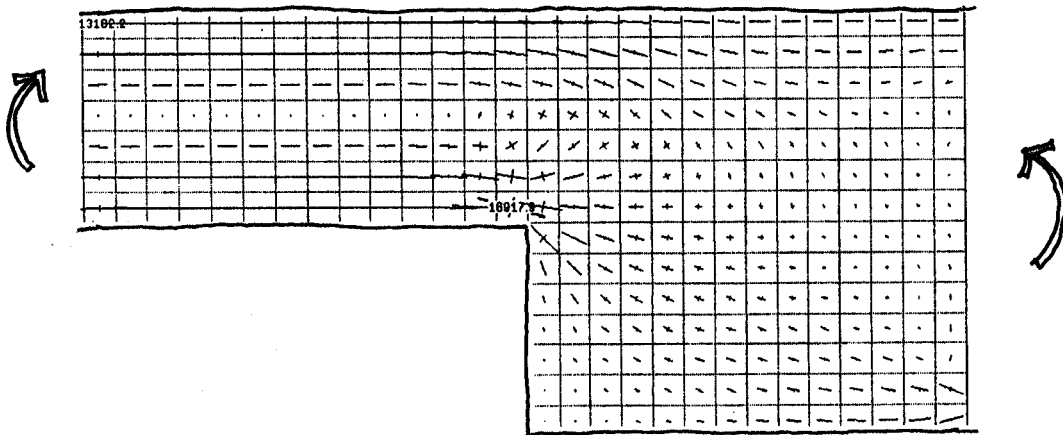


Figura EE3.4

De acuerdo con el sistema de bielas y tirantes de la figura EE3.3, la armadura denominada  $A_2$  en la figura EE.3.3 se anclará gracias a las compresiones  $C_{13d}$  y  $C_{12d}$ . El nudo "1" se dispone de forma que  $x=0.40$  m (centro del anclaje de la armadura  $A_2$ ), comprobándose que los ángulos  $\alpha_{12}$  y  $\alpha_{13}$  se encuentran dentro del rango habitual  $22^\circ - 45^\circ$ .

$$\alpha_{12} = 36.87^\circ, \quad \alpha_{13} = 26.57^\circ$$

## 2º OBTENCIÓN DE ESFUERZOS Y COMPROBACIÓN DEL EQUILIBRIO

### Nudo 2

Por equilibrio (ver figura EE.3.5)

$$\frac{T_{23d}}{180} = \frac{0.30}{0.40} \rightarrow T_{23d} = 135 \text{ kN}$$

$$C_{12d} = \sqrt{T_{23d}^2 + 180^2} = 225 \text{ kN}$$

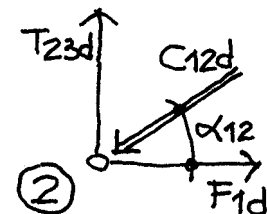


FIGURA EE 3-5

### Nudo 3

Por equilibrio (ver figura EE.3.6)

$$\frac{T_{23d}}{450 - 180} = \frac{0.20}{0.40} \rightarrow T_{23d} = 135 \text{ kN}$$

$$C_{13d} = \sqrt{T_{23d}^2 + (450 - 180)^2} = 301.87 \text{ kN}$$

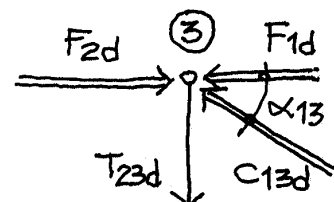


FIGURA EE 3-6

### Nudo 1

Comprobación del equilibrio (figura EE.3.7)

$$C_{13d} \cdot \cos \alpha_{13} + C_{12d} \cdot \cos \alpha_{12} = 301.87 \cos 26.57^\circ +$$

$$225 \cos 36.87^\circ = 450 \text{ kN} \rightarrow \text{Cumple}$$

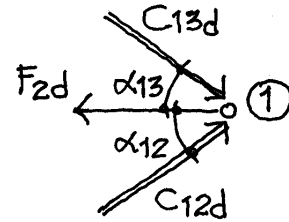


FIGURA EE 3-7

### 3º DISEÑO DE ARMADURA

Se limita la tensión a 40 kN/cm<sup>2</sup> en E.L.U.

$$\text{La armadura } A_2 = \frac{450}{40} = 11.25 \text{ cm}^2 \rightarrow \text{se disponen } 4\phi 20$$

$$\text{La armadura } A_1 = \frac{180}{40} = 4.5 \text{ cm}^2$$

$$\text{Cuantía mínima } A_{1min} = \frac{2.8}{1000} \cdot 40 \cdot 60 = 6.72 \text{ cm}^2 \rightarrow \text{se disponen } 4\phi 16$$

$$\text{La armadura } A_{23} \text{ deberá ser } A_{23} \geq \frac{135 \text{ kN}}{40 \text{ kN/cm}^2} = 3.375 \text{ cm}^2$$

Se disponen 4  $\phi$  16 (es la armadura  $A_1$  prolongada)

### 4. COMPROBACIÓN DE NUDOS

#### Nudo 1

En este nudo se ancla la armadura  $A_2$ . Basta con disponer la longitud de anclaje de la armadura para que el nudo sea válido.

No obstante, se incluye la comprobación del nudo.

Por anclarse en él un tirante, la tensión de compresión en el hormigón se limita a

$$0.70 f_{cd} = 0.70 \frac{25000}{1.5} = 11666 \text{ kN/m}^2$$

Por otra parte, la longitud de anclaje de  $A_2$  será  $l_{bl} = 1.40 \cdot 15 \cdot 2^2 = 84 \text{ cm}$

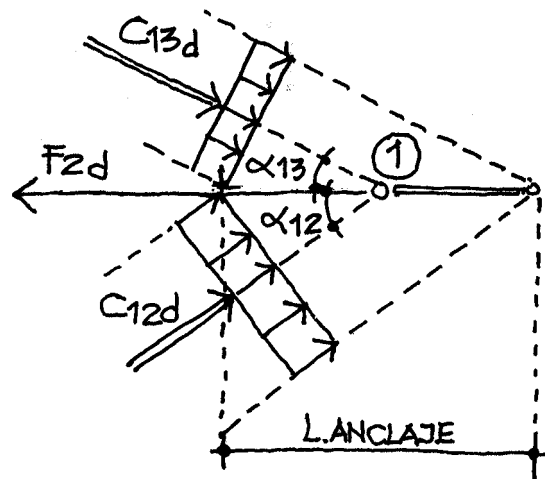


Figura EE3.8

De la figura EE.3.8

$$\sigma_{c13d} = \frac{C_{13d}}{L \cdot \sin \alpha_{13} \cdot b} = \frac{302 \text{ kN}}{0.84 \cdot \sin 26.57^\circ \cdot 0.40} = 2009 \text{ kN/m}^2 \leq 0.70 f_{cd}$$

$$\sigma_{c12d} = \frac{C_{12d}}{L \cdot \sin \alpha_{12} \cdot b} = \frac{225 \text{ kN}}{0.84 \cdot \sin 36.87^\circ \cdot 0.40} = 1116 \text{ kN/m}^2 \leq 0.70 f_{cd}$$

Siendo  $b = 0.40 \text{ m}$  el ancho de la viga

### Nudo 2

En este caso basta con disponer las armaduras  $A_1$  y  $A_{23}$  con el radio de doblado suficiente.

Para  $\phi 16$  Diámetro doblado =  $12 \phi = 19.2 \text{ cm} \rightarrow 20 \text{ cm}$

No obstante, se comprueba el nudo. Por anclarse armaduras en el hormigón, también se deberá cumplir que  $\sigma_{cd} \leq 0.70 f_{cd}$

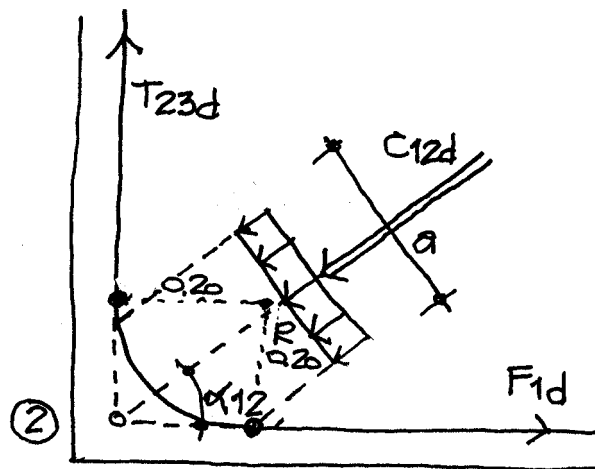


Figura EE3.9

$a = 2r \sin \alpha_{12} = 2 \cdot 0.10 \cdot \sin 36.87^\circ = 0.12 \text{ m}$   
 $b = 0.40 \text{ m}$  ancho de la viga

$$\sigma_{c12d} = \frac{C_{12d}}{a \cdot b} = \frac{225 \text{ kN}}{0.12 \cdot 0.40 \text{ m}^2} = 4687 \text{ kN/m}^2 \leq 0.70 f_{cd}$$

### Nudo 3

Por anclarse la armadura en el nudo, la tensión de compresión en el hormigón debe limitarse a  $0.70 f_{cd}$

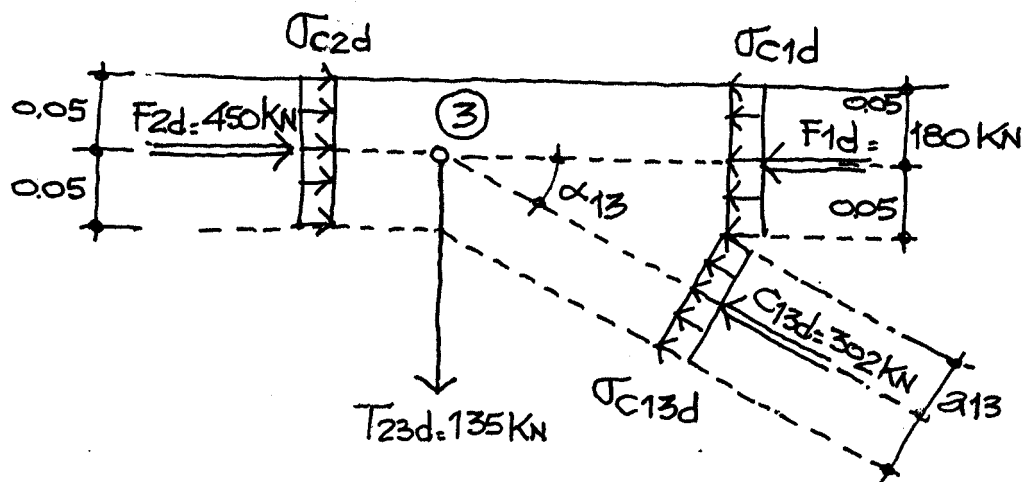


Figura EE3.10



De la figura EE.3.10

$$\sigma_{c2d} = \frac{450}{0.10 \cdot 0.40} = 11250 \text{ kN/m}^2 \leq 0.70 f_{cd}$$

$$\sigma_{c1d} = \frac{180}{0.10 \cdot 0.40} = 4500 \text{ kN/m}^2 \leq 0.70 f_{cd}$$

$$a_{13} = 2 \cdot 0.05 \cos \alpha_{13} = 0.09 \text{ m}$$

$$\sigma_{c13d} = \frac{302}{0.09 \cdot 0.40} = 8388 \text{ kN/m}^2 \leq 0.70 f_{cd} \quad \text{Cumple}$$

Anclaje de la armadura  $A_{23}$

$$l_{bl} = 15 \cdot 1.6^2 = 38 \text{ cm} \cdot \frac{f_{yk}}{20} \cdot 1.6 = 40.8 \text{ cm} \rightarrow \approx 40 \text{ cm}$$

En vertical 0.10 m en horizontal 0.30 m

### 5º ARMADO

Con los criterios anteriores, se dispone la armadura que se representa en la figura EE3.11.

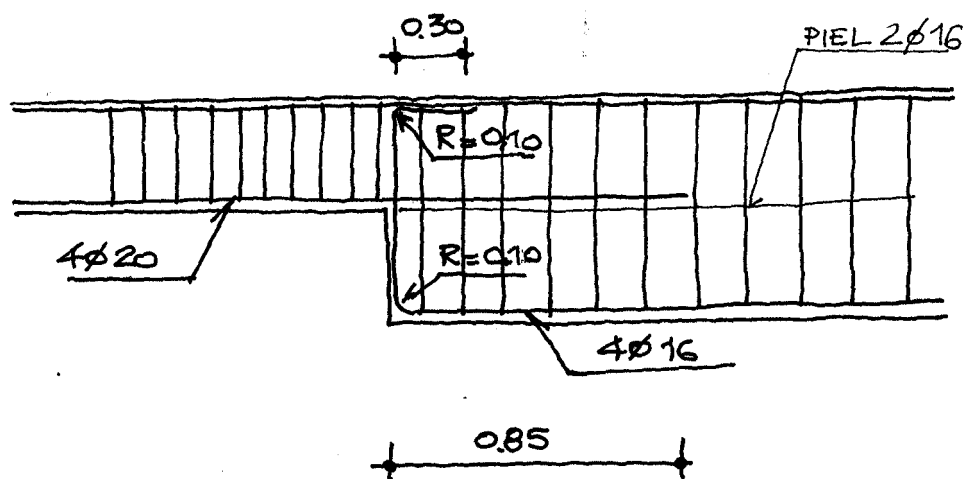


Figura EE3.11

**EP.1. Diafragma sección cajón**

Sea el diafragma de apoyo en pila de un tablero en sección cajón de hormigón pretensado. La reacción máxima en el apoyo en pila es  $R_d=6750$  kN. Se emplea hormigón H-35 y acero B500S con control normal:  $\gamma_c=1.50$   $\gamma_s=1.15$ . Se desea dimensionar la armadura y comprobar el diafragma por el método de bielas y tirantes.

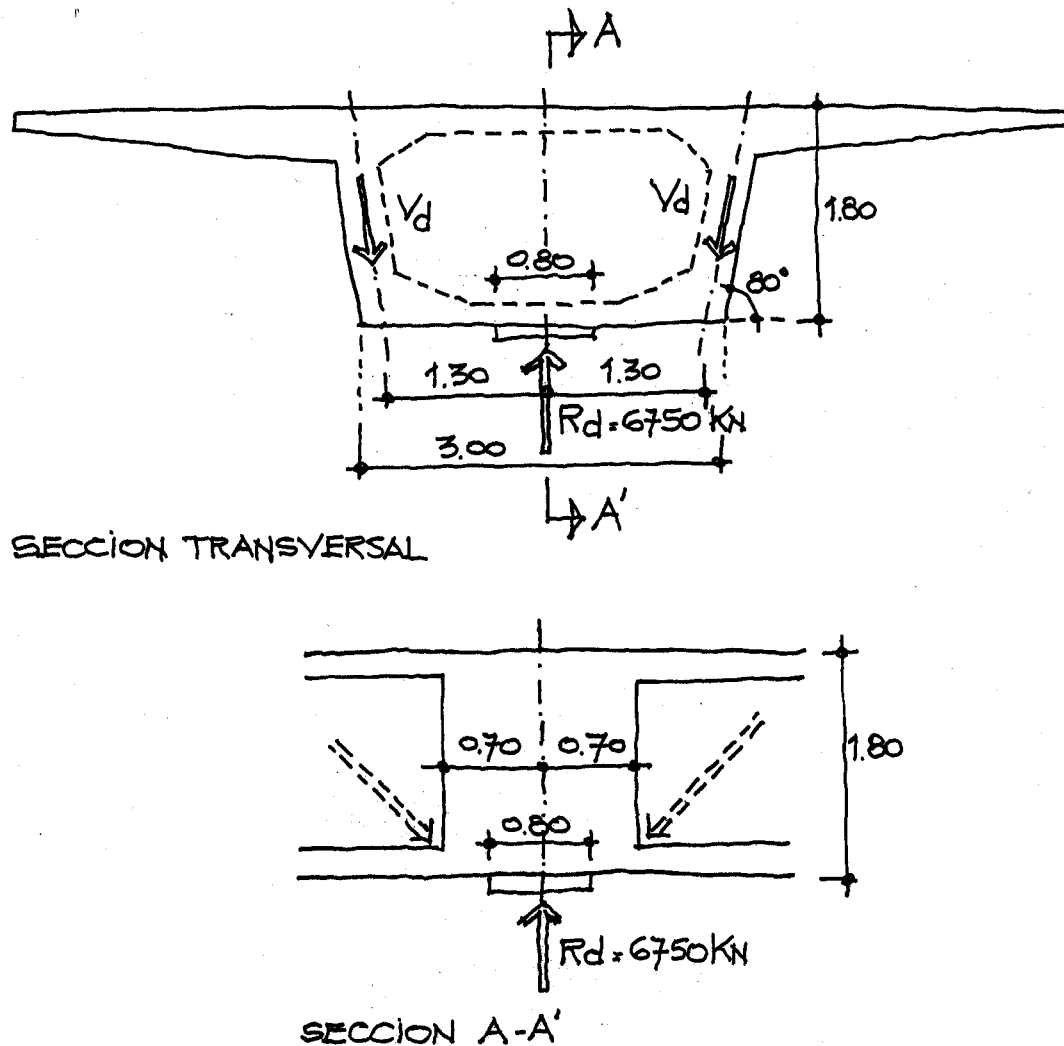


Figura EP1.1

## 1º. PLANTEAMIENTO DEL MECANISMO RESISTENTE

El cortante general del cajón se transmite por las almas y de éstas al apoyo mediante el diafragma (figura EP1.2)

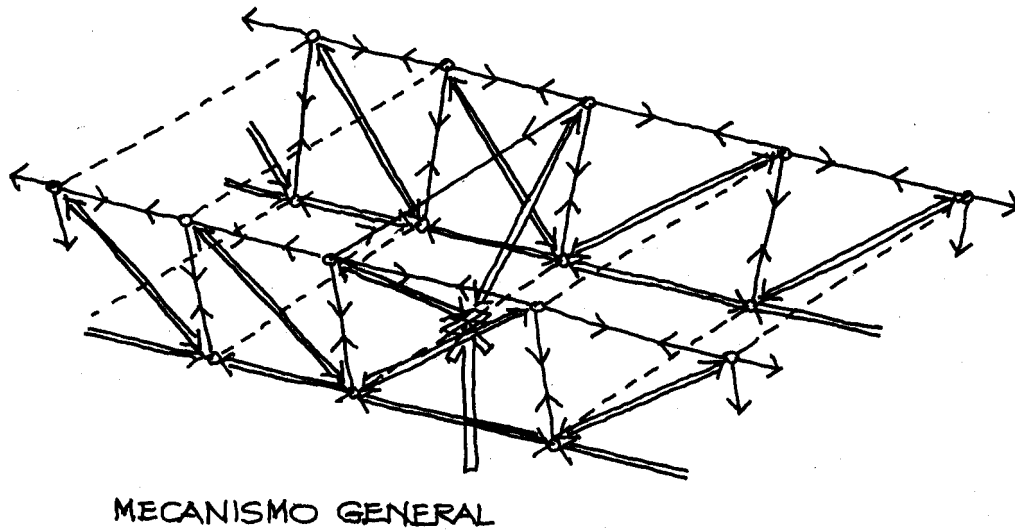


Figura EP1.2

Existen distintas posibilidades para explicar la transmisión de las cargas a través del diafragma.

Se ha elegido un mecanismo sencillo como el indicado en la figura EP1.3, que se asemeja el obtenido con la ayuda de un modelo de elementos finitos en régimen elástico ver figura EP1.4.

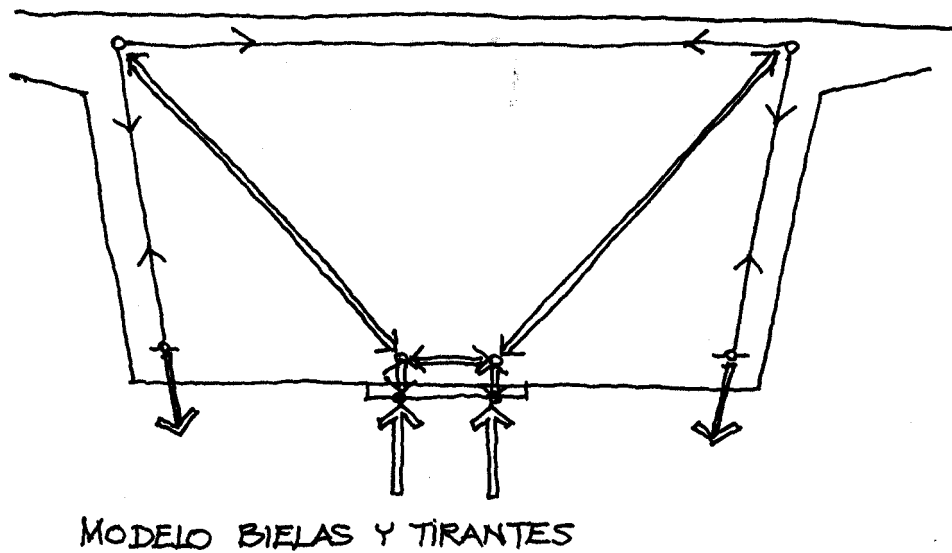


Figura EP1.3

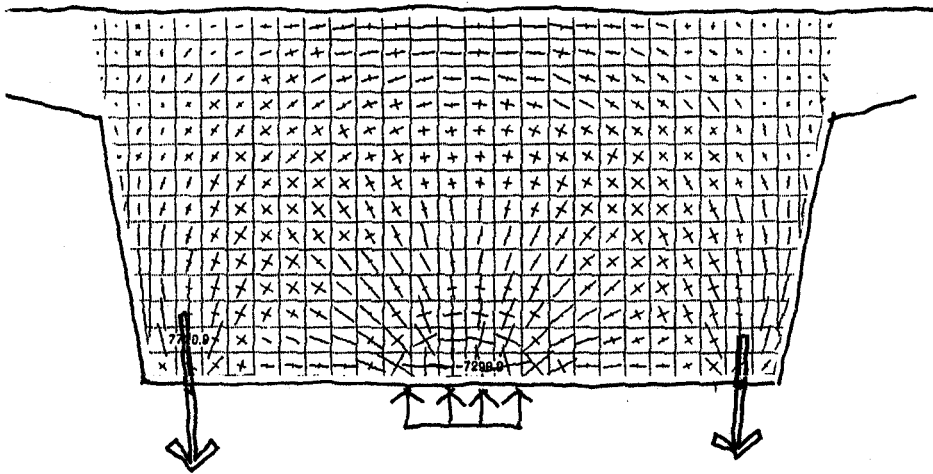


Figura EP1.4

Se conoce la reacción máxima mayorada  $R_d=6750$  kN; por lo tanto, la carga que se transmite por cada alma es:  $V_d = \frac{6750}{2 \cdot \cos 10^\circ} = 3427$  kN

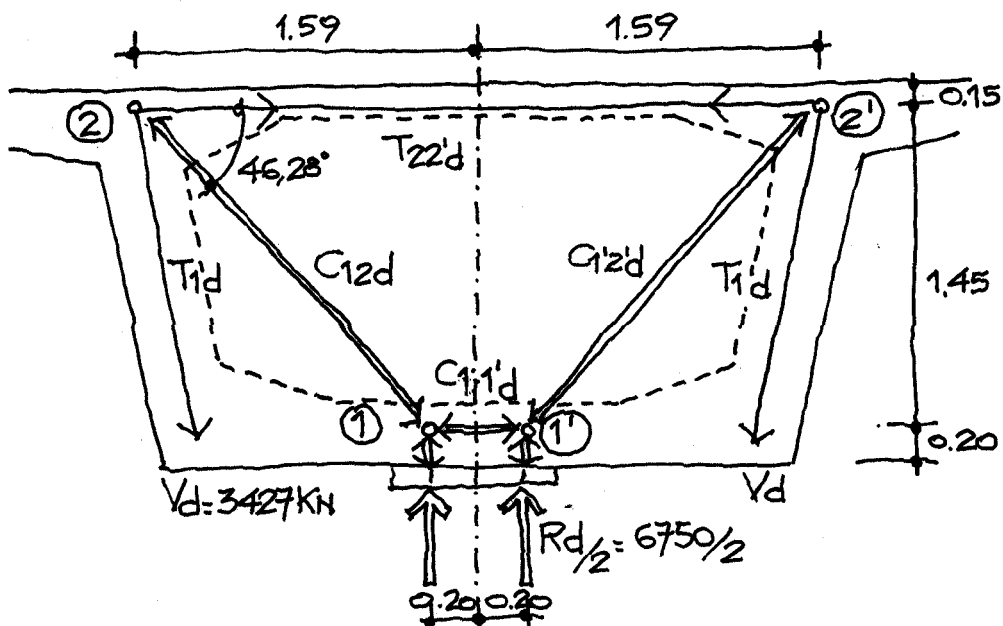


Figura EP1.5

Se ha supuesto que el cortante transmitido por las almas se transmite a la parte inferior del diafragma (ver figura EP1.2) por lo que es necesario colgar la carga mediante los tirantes  $T_{1d}$  y  $T_{1'd}$  hacia los nudos 2 y 2'; desde ellos la carga se transmite por compresión hacia el apoyo (figura EP1.5).

## 2º OBTENCIÓN DE ESFUERZOS Y COMPROBACIÓN DEL EQUILIBRIO

### Nudo 1

Por equilibrio (ver figura EP1.6), con la notación de la figura EP1.5

$$C_{12d} = \frac{\frac{6750}{2}}{\sin 46.28^\circ} = 4670 \text{ kN}$$

$$C_{11'd} = C_{12d} \cdot \cos 46.28^\circ = 4670 \cdot 0.69 = 3227 \text{ kN}$$

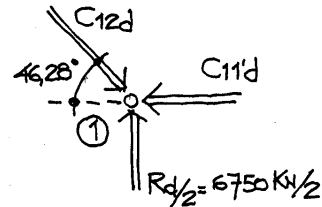


FIGURA EP 1-6

### Nudo 2

Por equilibrio (ver figura EP1.7)

$$T_{22'd} = C_{12d} \cos 46.28^\circ - V_d \sin 10^\circ$$

$$T_{22'd} = 4670 \cdot 0.69 - 3427 \cdot \sin 10^\circ = 2632 \text{ kN}$$

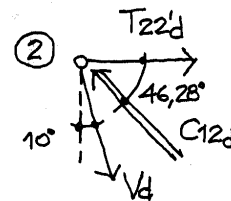


FIGURA EP 1-7

Comprobación equilibrio cargas verticales en el nudo:

$$V_d \cos 10^\circ = 3427 \cdot 0.98 = 3375 \text{ kN} = C_{12d} \sin 46.28^\circ = 4670 \cdot 0.72 = 3375 \rightarrow \text{cumple}$$

## 3º DISEÑO DE LA ARMADURA

$$T_{22'd} = 2632 \text{ kN} \quad A_{s22'} = \frac{2632}{40} = 65.8 \text{ cm}^2 \longrightarrow 14\phi 25$$

$$V_d = T_{1d} = T_{1'd} = 3427 \text{ kN} \quad A_{svd} = \frac{3427}{40} = 85.7 \text{ cm}^2 \longrightarrow 14c\phi 20$$

Se ha limitado la tensión en la armadura en estado límite último a 400 N/mm<sup>2</sup> (40 kN/cm<sup>2</sup>), para controlar de forma indirecta la fisuración.

## 4. COMPROBACIÓN DE NUDOS

### Nudo 1

Se trata de un nudo multicomprimido. Del lado de la seguridad se ha limitado la tensión de compresión en el hormigón de forma que  $\sigma_{cd} \leq f_{cd}$ .

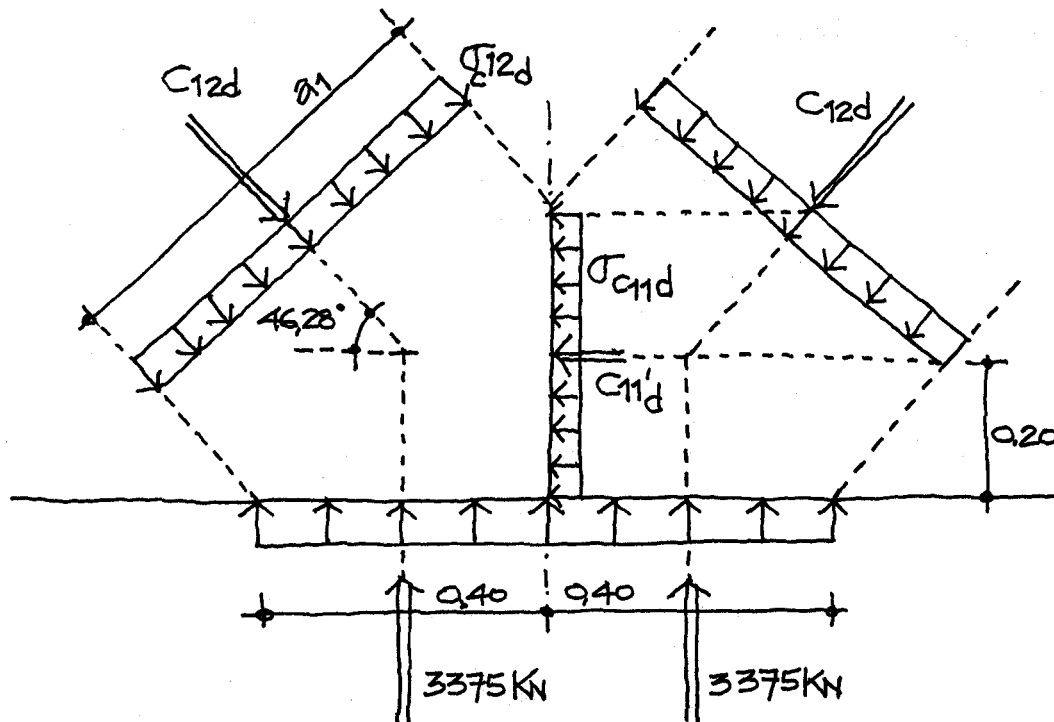


Figura EP1.8

Por geometría (ver figura EP1.8)

$$a_1 = 0,40 \sin 46,28^\circ + 2 \cdot 0,20 \cdot \cos 46,28^\circ = 0,57 \text{ m}$$

$$\sigma_{c12,d} = \frac{C_{12d}}{a_1 \cdot b} = \frac{4670}{0,57 \cdot 0,80} = 10241 \text{ kN/m}^2 < f_{cd} \rightarrow \text{cumple, ya que } f_{cd} = \frac{35 \cdot 10^3}{1,5} = 23333 \text{ kN/m}^2$$

con  $b = 0,80 \text{ m}$  dimensión del apoyo en el sentido perpendicular

$$\sigma_{c11'd} = \frac{C_{11'd}}{2 \cdot 0,20 \cdot b} = \frac{3227}{2 \cdot 0,20 \cdot 0,80} = 10084 \text{ kN/m}^2 < f_{cd} \rightarrow \text{cumple}$$

## Nudo 2

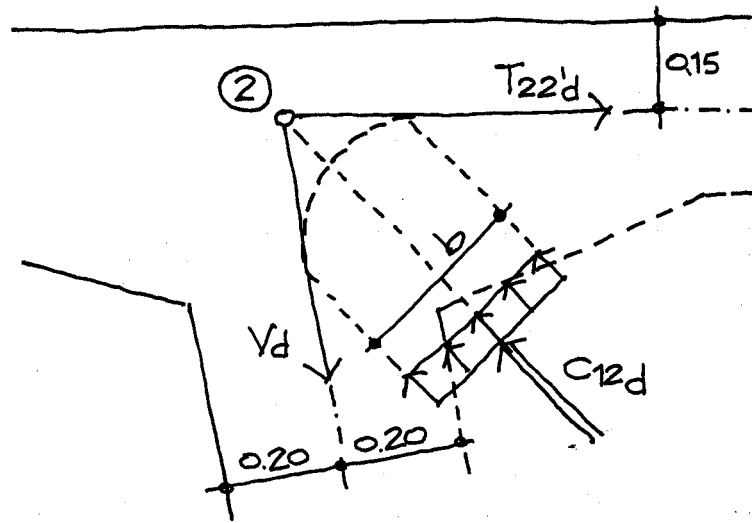


Figura EP1.9

Por tratarse de un nudo en el que se anclan tracciones, el límite de la tensión de compresión en el hormigón es:

$$\sigma_{c12dmax} = f_{1cd} = \frac{35 \cdot 10^3}{1.5} \cdot 0.70 = 16333 \text{ kN/m}^2$$

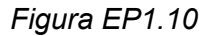
Con  $C_{12d} = 4670 \text{ kN}$

$$A_{cnec} = \frac{4670}{16333} = 0.29 \text{ m}^2$$

Como el ancho del nudo es igual al ancho del diafragma  $l = 2 \cdot 0.70 = 1.40 \text{ m}$

$$b_{nec} = \frac{0.29}{1.40} = 0.20 \text{ m} \quad b_{real} \cong 0.30 \text{ m} \rightarrow \text{cumple (ver figura EP1.10)}$$





Además de la armadura principal “1”, y los cercos de suspensión “2”, es necesario disponer una armadura en malla “3” y “4” (ver figura EP1.11).

$$A_s = \frac{0.15}{100} \cdot 100 \cdot 140 = 21 \text{ cm}^2 \longrightarrow \# \phi 20 \text{ a } 0.15$$
$$A_{s5} = \frac{1}{3} \cdot 14 \times 4.909 = 23 \text{ cm}^2 \cong 7 \phi 20.$$

174

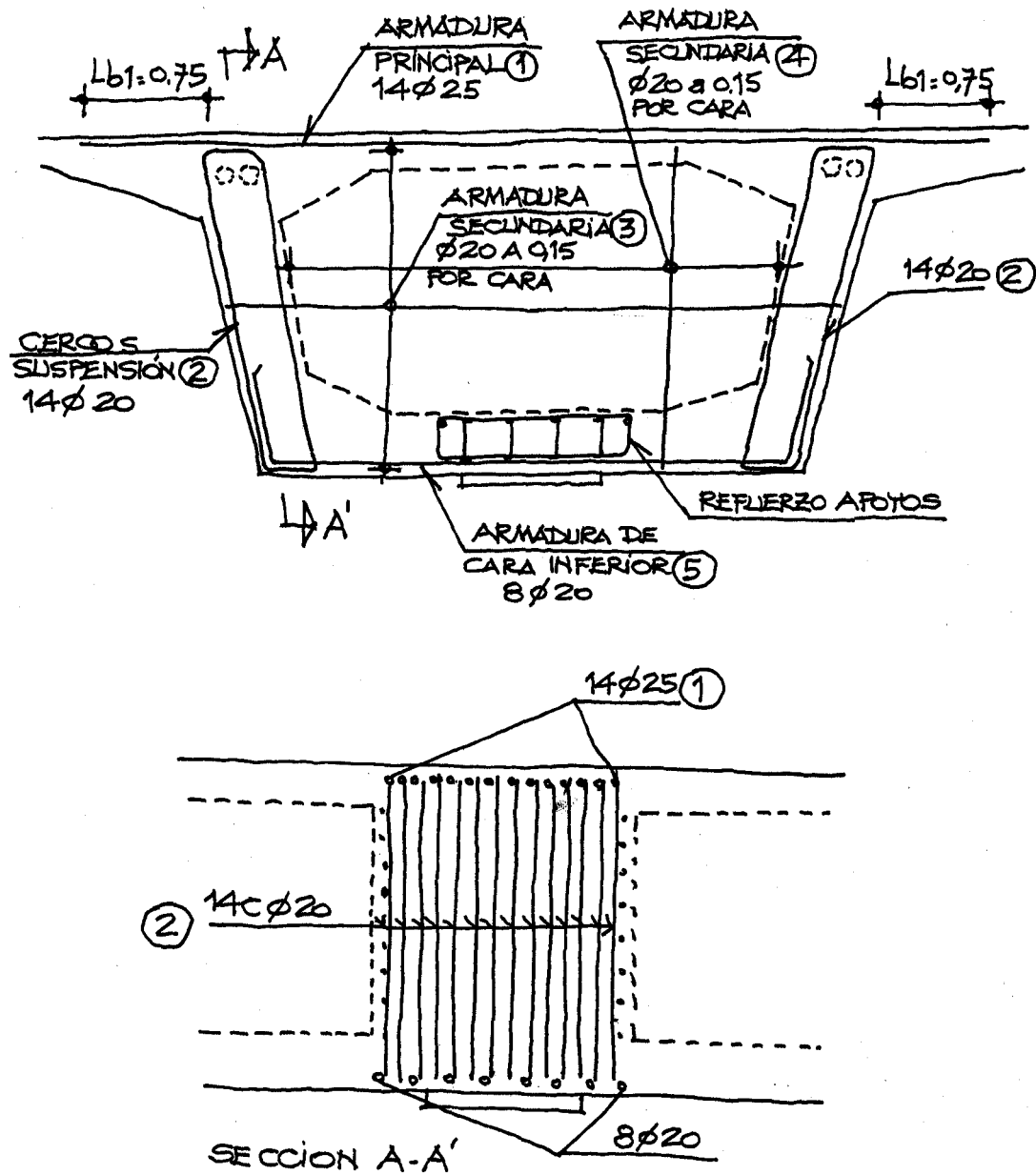


Figura EP1.11

**EP.2. Dintel de pila de puente**

Sea el dintel de una pila de puente representado en las figuras EP2.1 y EP2.2. La situación pésima para el dintel corresponde a aquella en que las reacciones del tablero son:

$N_{1d} = 4000$  kN y  $N_{2d} = 1000$  kN. Como materiales se emplean hormigón H-30 y acero de armar B500S, con control normal  $\gamma_c=1.50$   $\gamma_s=1.15$ . Se desea dimensionar la armadura y comprobar el dintel por el método de bielas y tirantes

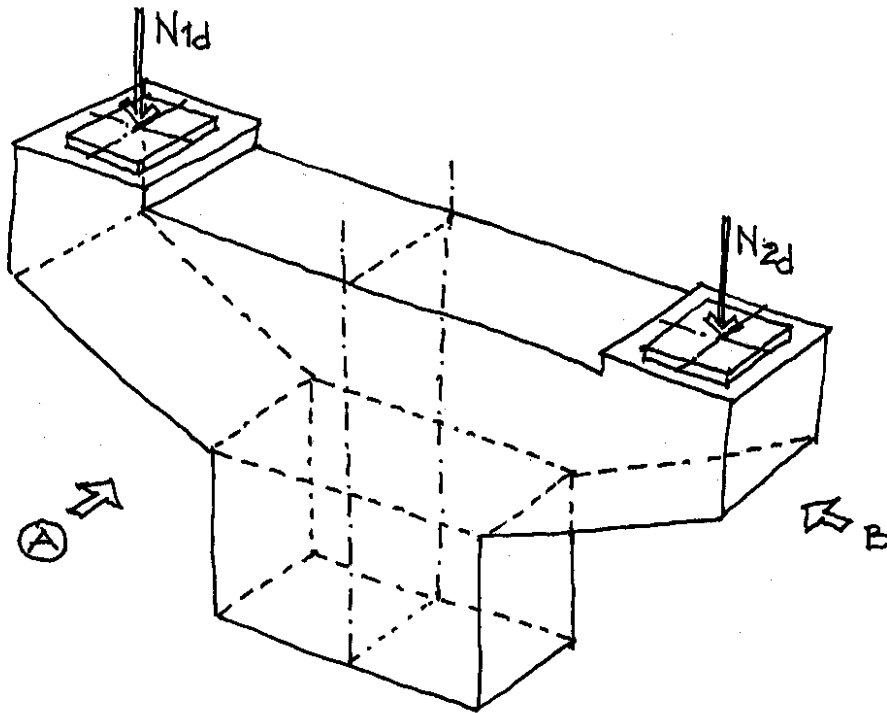


Figura EP2.1

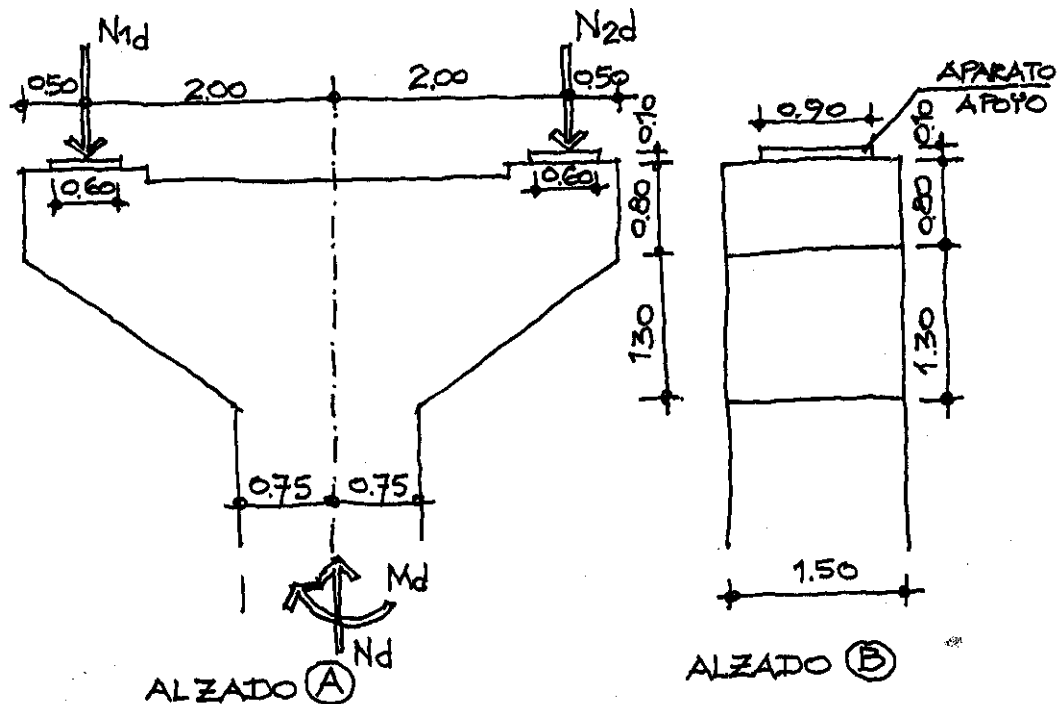


Figura EP2.2

## 1º. PLANTEAMIENTO DEL MECANISMO RESISTENTE

Conocidas las cargas mayoradas

$$N_{1d} = 4000 \text{ kN}$$

$$N_{2d} = 1000 \text{ kN}$$

se calculan los esfuerzos en la frontera (figura EP2.2) despreciando el peso del cabecero.

$$N_d = 4000 + 1000 = 5000 \text{ kN}$$

$$M_d = 4000 \cdot 2,00 - 1000 \cdot 2,00 = 6000 \text{ kNm}$$

Suponiendo un recubrimiento mecánico de 0,05 m y una profundidad de bloque comprimido de 0,50 m, en la región de frontera se obtiene por equilibrio (figura EP2.3):

$$C_{Fd} - T_{Fd} = 5000 \text{ kN}$$

$$C_{Fd} \cdot (0.75 - 0.25) + T_{Fd} \cdot (0.75 - 0.05) = 6000 \text{ kNm}$$

Resolviendo:

$$C_{Fd} = 7917 \text{ kN}$$

$$T_{Fd} = 2917 \text{ kN}$$

Un posible mecanismo resistente es el indicado en la figura EP2.3

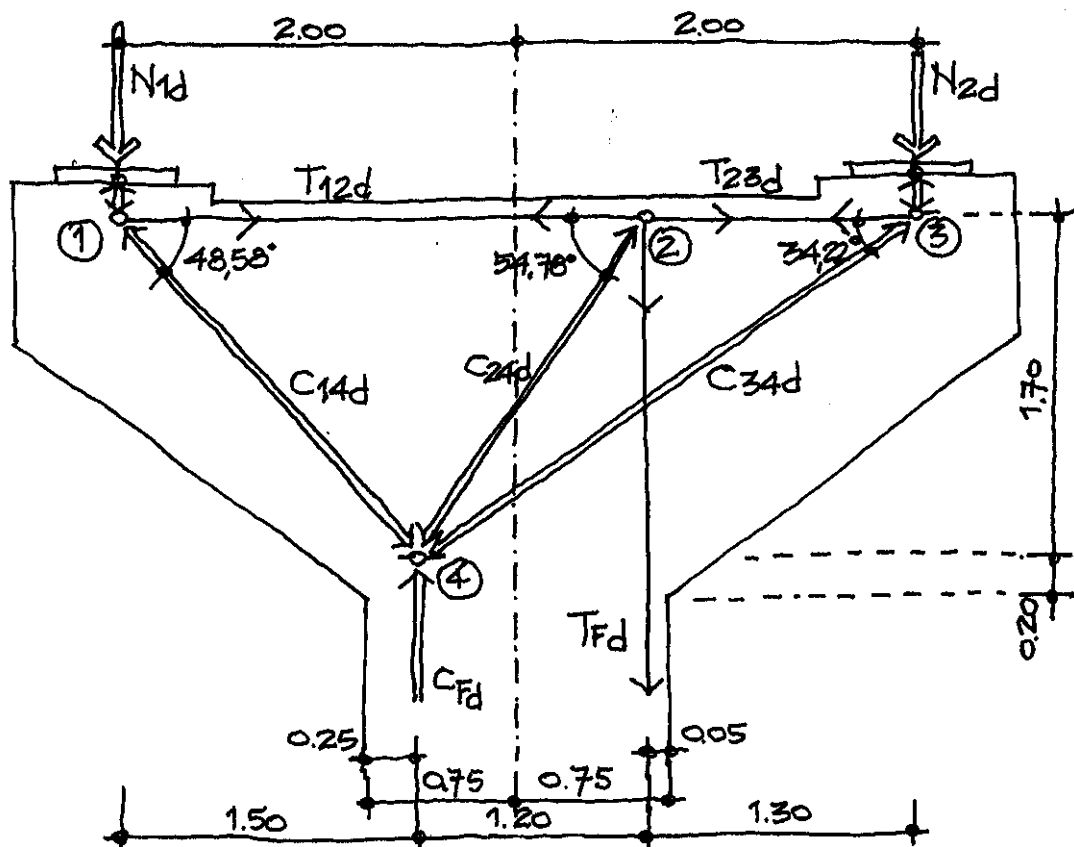


Figura EP2.3

Se compara con un modelo de elementos finitos en régimen elástico y lineal (figura EP2.4)

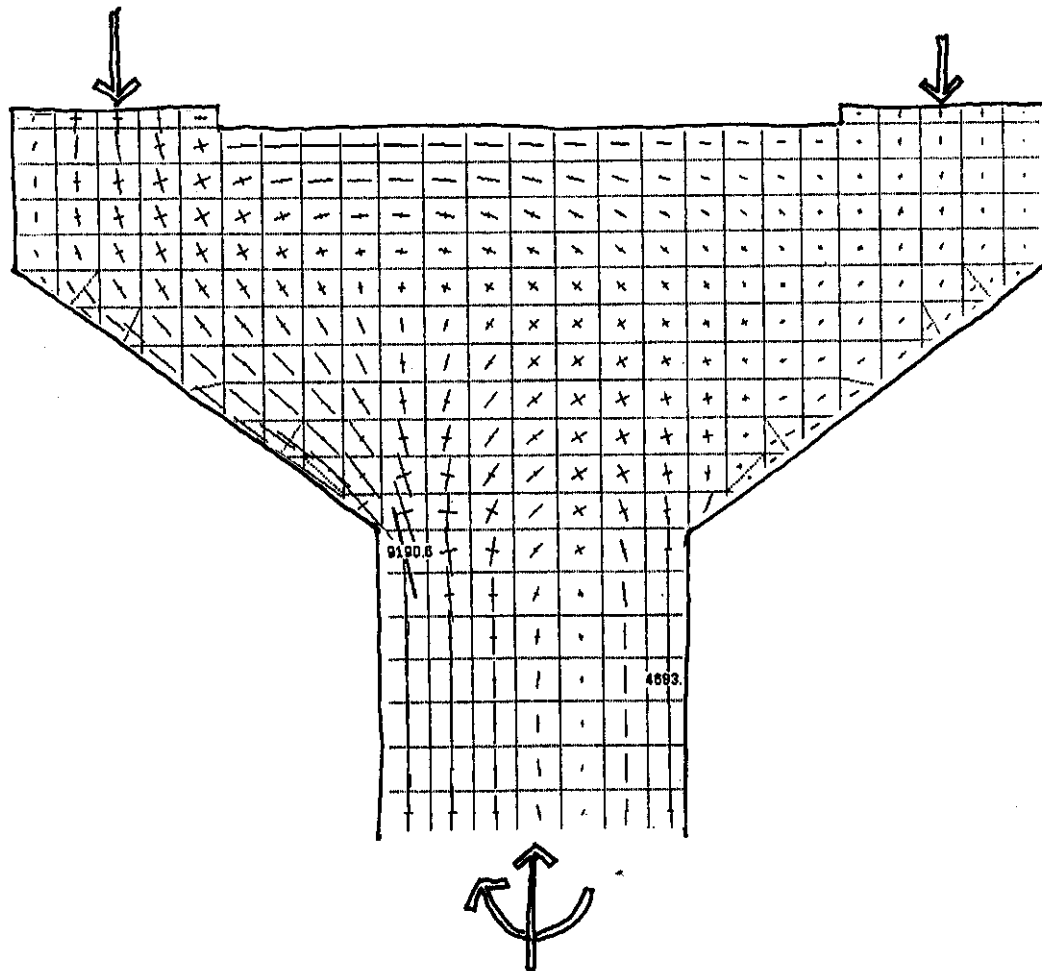


Figura EP2.4

Se puede observar que el modelo de bielas y tirantes de la figura EP2.3 se adapta en lo fundamental al flujo de tensiones principales.

No obstante, la armadura (tirantes) se ha dispuesto según las dos direcciones habituales (vertical y horizontal).

## 2º. OBTENCIÓN DE ESFUERZOS Y COMPROBACIÓN DEL EQUILIBRIO

### Nudo 1

Por equilibrio (ver figura EP2.5)

$$T_{12d} = \frac{N_{1d}}{\operatorname{tg} 48.58^\circ} = \frac{4000}{1.13} = 3529 \text{ kN}$$

$$C_{14d} = \frac{N_{1d}}{\operatorname{sen} 48.58^\circ} = \frac{4000}{0.75} = 5334 \text{ kN}$$

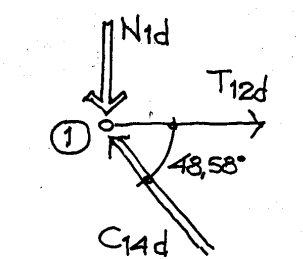


FIGURA EP 2-5

### Nudo 3

Por equilibrio (figura EP2.6)

$$T_{23d} = \frac{N_{2d}}{\operatorname{tg} 34.22^\circ} = \frac{1000}{0.68} = 1470 \text{ kN}$$

$$C_{34d} = \frac{N_{2d}}{\operatorname{sen} 34.22^\circ} = \frac{1000}{0.56} = 1778 \text{ kN}$$

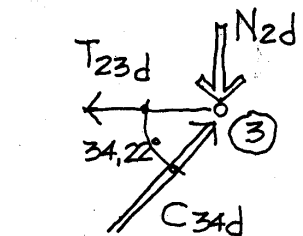


FIGURA EP 2-6

### Nudo 2

Por equilibrio (figura EP2.7)

$$C_{24d} = \frac{T_{12d} - T_{23d}}{\cos 54.78^\circ} = \frac{3529 - 1470}{0.58} = 3570 \text{ kN}$$

Comprobación de la componente vertical

$$C_{24d} \operatorname{sen} 54.78^\circ = 2917 \text{ kN} = T_{Fd}$$

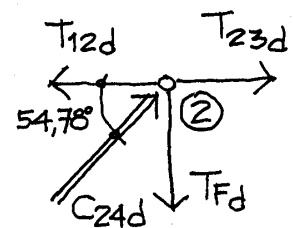


FIGURA EP 2-7



#### Nudo 4

Comprobación del equilibrio (figura EP2.8)

$$C_{14d} \text{ sen } 48.58^\circ + C_{24d} \text{ sen } 54.78^\circ + C_{34d} \text{ sen } 34.22^\circ = \\ 5334 \cdot 0.75 + 3570 \cdot 0.82 + 1778 \cdot 0.56 = 7917 = C_{Fd}$$

Luego el sistema está en equilibrio

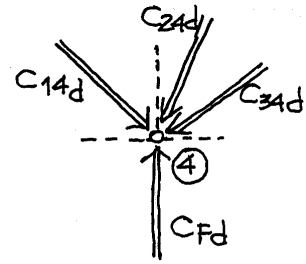


FIGURA EP 2-8

#### **3º DISEÑO DE LA ARMADURA**

$$T_{12d} = 3529 \text{ kN} \quad A_{s12} = \frac{3529}{40} = 88.2 \text{ cm}^2 : \text{ se disponen } 18\phi 25$$

$$T_{23d} = 1470 \text{ kN} \quad A_{s23} = \frac{1470}{40} = 36.7 \text{ cm}^2 : 18\phi 25$$

Se dispone la armadura simétrica para tener en cuenta la inversión del esquema de cargas exteriores, para otras hipótesis de carga.

$$T_{dF} = 2917 \text{ kN}$$

Aunque se trata de la armadura de flexión general de la pila se limita su tensión a 40 kN/cm<sup>2</sup> para controlar de forma indirecta la fisuración.

$$A_{sF} = \frac{2917}{40} = 72.9 \text{ cm}^2 : \text{ se disponen } 15\phi 25$$

#### **4º COMPROBACIÓN DE NUDOS**

En el nudo 1 de la figura EP2.3 se ancla un tirante, por lo tanto la tensión de compresión en el hormigón se limita a 0.70 f<sub>cd</sub>. Así mismo hay que comprobar que la armadura esté suficientemente anclada.

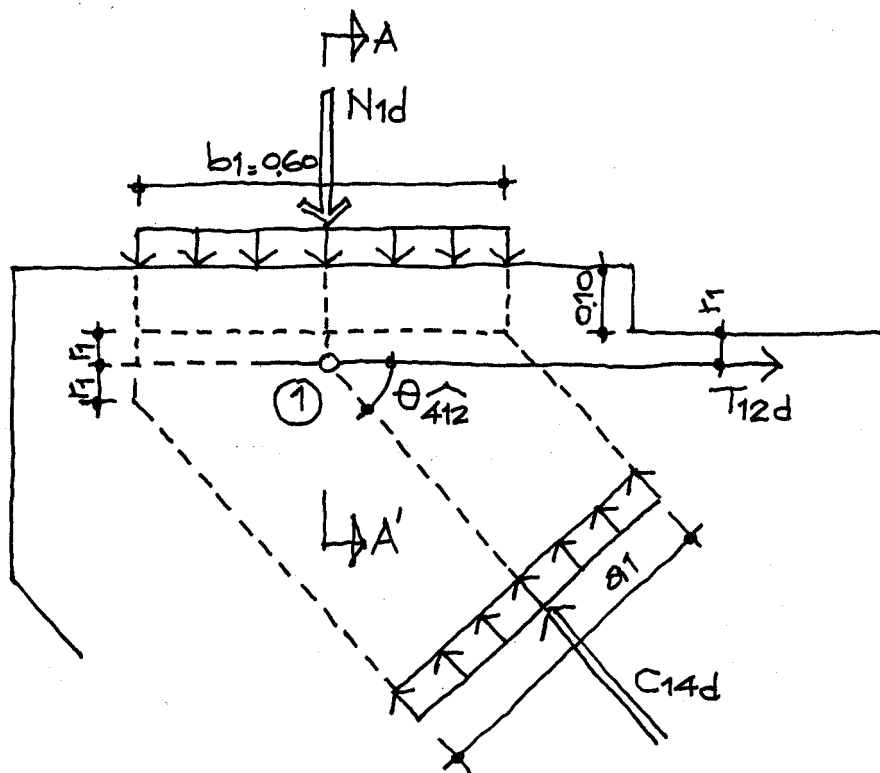


Figura EP2.9

Se calcula en primer lugar la compresión en el hormigón.

Por geometría  $a_1 = b_1 \operatorname{sen} \theta_{412} + 2 r_1 \cos \theta_{412}$

Con  $r_1 = 0.05 \text{ m}$

$$a_1 = 0.60 \operatorname{sen} 48.58^\circ + 0.10 \cos 48.58^\circ = 0.52 \text{ m}$$

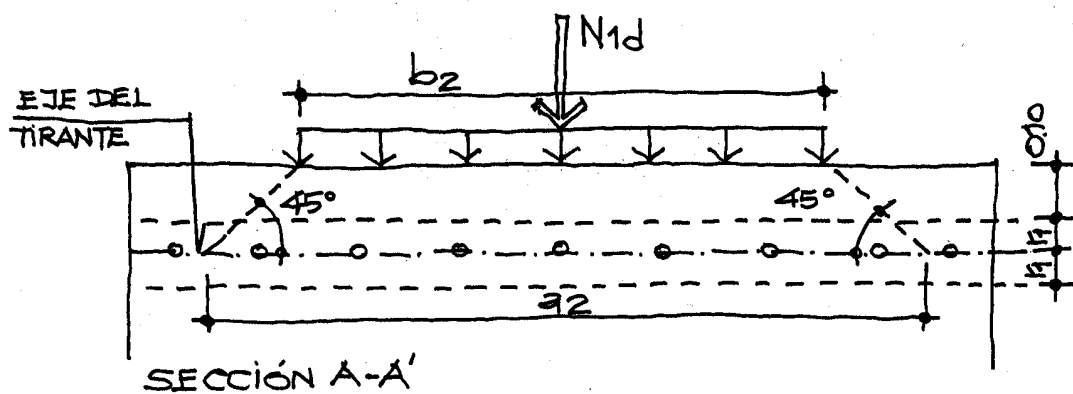


Figura EP2.10

Admitiendo una distribución en el sentido transversal a 45° (ver figura EP2.10), aumentaría el tamaño de la biela.

$$\sigma_{cN1d} = \frac{N_{1d}}{b_1 \cdot b_2} = \frac{4000}{0.60 \cdot 0.90} = 7407 \text{ kN/m}^2$$

$$f_{1cd} = 0.70 f_{cd} = 0.70 \frac{30 \cdot 10^3 \text{ kN/m}^2}{1.50} = 14000 \text{ kN/m}^2 > \sigma_{1cd} \text{ Cumple}$$

$$\sigma_{c14d} = \frac{C_{14d}}{a_1 \cdot a_2} = \frac{5334}{0.52 \cdot 1.20} = 8548 \text{ kN/m}^2 < f_{1cd} \text{ Cumple}$$

$$\text{Con } a_2 = b_2 + (0.10 + r_1) 2 = 0.90 + 0.15 \cdot 2 = 1.20 \text{ m}$$

Anclaje de la armadura

$L_{bII} = 1.4 \text{ m} \cdot \phi^2 = 1.4 \cdot 13 \cdot 2.5^2 = 114 \text{ cm}$ . Se prolonga la armadura 0.40 m por la cara exterior del cabecero para asegurar el anclaje.

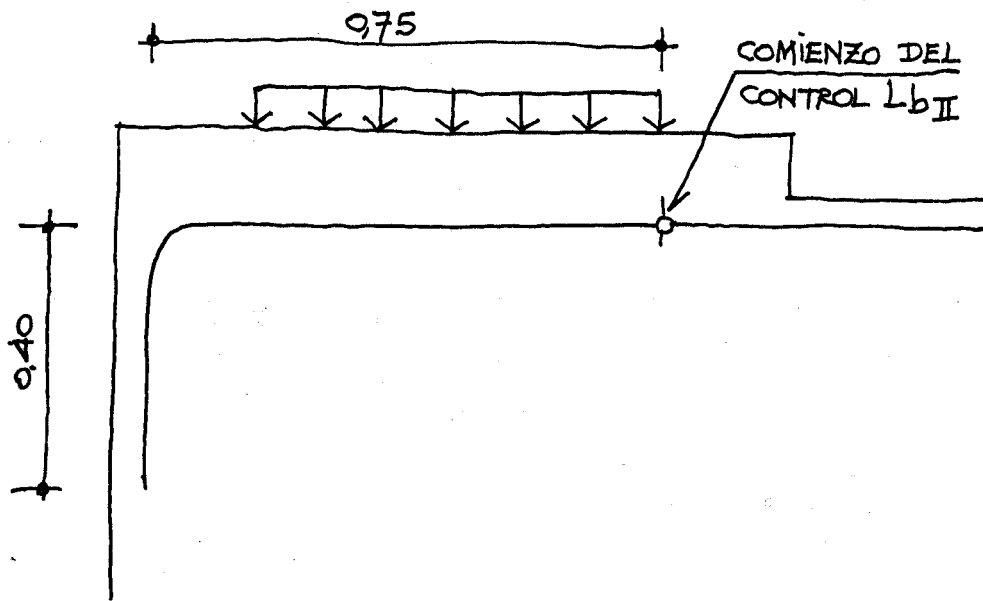


Figura EP2.11

## NUDO-2

Este nudo tiene la misma tipología que el nudo 1.

En este caso

$$\begin{aligned} b_1 &= 0.60 \text{ m} & r_1 &= 0.05 \text{ m} \\ b_2 &= 0.90 \text{ m} & \theta_{234} &= 34.22^\circ \end{aligned}$$

Por geometría:

$$a_1 = b_1 \sin \theta_{234} + 2r_1 \cos \theta_{234}$$

$$a_1 = 0.60 \sin 34.22^\circ + 2 \cdot 0.05 \cdot \cos 34.22^\circ = 0.42 \text{ m}$$

$$a_2 = b_2 + (0.10 + r_1) \cdot 2 = 1.20 \text{ m}$$

$$N_{2d} = 1000 \text{ kN}$$

$$C_{34d} = 1778 \text{ kN}$$

$$\sigma_{cN2d} = \frac{N_{2d}}{b_1 \cdot b_2} = \frac{1000}{0.60 \cdot 0.90} = 1851 \text{ kN/m}^2 < 14000 \text{ kN/m}^2$$

Cumple

$$\sigma_{c34d} = \frac{C_{34d}}{a_1 \cdot a_2} = \frac{1778}{0.42 \cdot 1.20} = 3527 \text{ kN/m}^2 < 14000 \text{ kN/m}^2$$

NUDO 4

Se trata de un nudo "bicomprimido"  $\sigma_{cd} \leq f_{cd} = 20000 \text{ kN/m}^2$

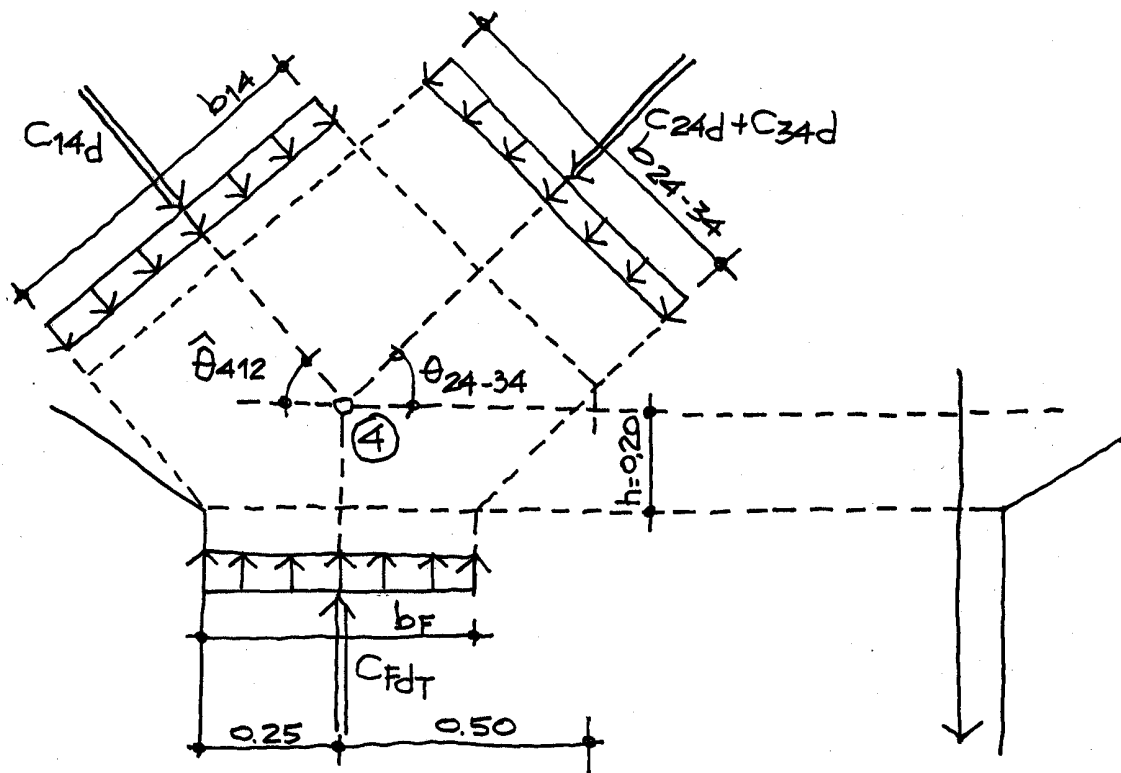


Figura EP2.12

Por geometría

$$b_F = 0.50 \text{ m}$$

la resultante de  $C_{24d}$  y  $C_{34d}$  (ver figura EP2.12)

$$C_{24d} = 3570 \text{ kN}$$

$$\theta = 54.78^\circ$$

$$C_{34d} = 1778 \text{ kN}$$

$$\theta = 34.22^\circ$$

$$C_{24xd} = 3570 \cos 54.78^\circ = 2059 \text{ kN}$$

$$C_{24yd} = 3570 \sin 54.78^\circ = 2916 \text{ kN}$$

$$C_{34xd} = 1778 \cos 34.22^\circ = 1470 \text{ kN}$$

$$C_{34yd} = 1778 \sin 34.22^\circ = 1000 \text{ kN}$$

$$C_{24-34d} = \sqrt{(2059 + 1470)^2 + (2916 + 1000)^2} = 5272 \text{ kN}$$

$$\theta_{24-34} = \arctan \frac{2059 + 1470}{2916 + 1000} = 42.02^\circ$$

$$b_{24-34} = 2 \cdot 0.20 \cos 42.02^\circ + 0.50 \cdot \sin 42.02^\circ = 0.63 \text{ m}$$

$$b_{14} = b_F \sin 48.58^\circ + 2 \cdot 0.20 \cdot \cos 48.58^\circ = 0.64 \text{ m}$$

Con un ancho de nudo de  $b=1.50 \text{ m}$

$$\sigma_{14d} = \frac{C_{14d}}{b_{14} \cdot b} = \frac{5334 \text{ kN}}{0.64 \cdot 1.50 \text{ m}^2} = 5556 \text{ kN/m}^2 \leq f_{cd}. \quad \text{Cumple}$$

$$\sigma_{24-34d} = \frac{C_{24-34d}}{b_{24-34} \cdot b} = \frac{5272 \text{ kN}}{0.63 \cdot 1.50 \text{ m}^2} = 5579 \text{ kN/m}^2 \leq f_{cd}. \quad \text{Cumple}$$

$$\sigma_{Fd} = \frac{C_{Fd}}{b_F \cdot b} = \frac{7917 \text{ kN}}{0.50 \cdot 1.50 \text{ m}^2} = 10556 \text{ kN/m}^2 \leq f_{cd}. \quad \text{Cumple}$$

## NUDO 2

En este nudo se debe anclar la armadura correspondiente al tirante  $T_{Fd}$  (ver figura EP2.13).

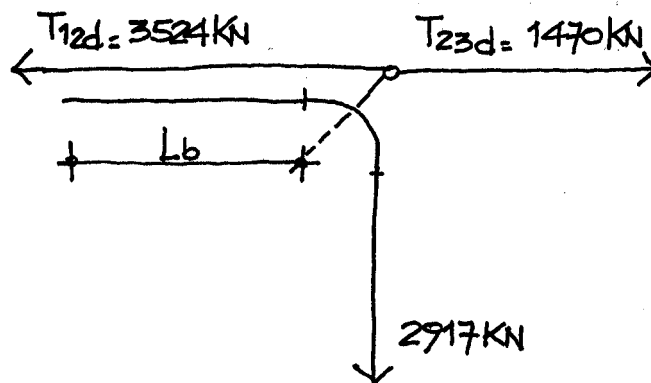


Figura EP2.13

La longitud de anclaje será  $l_{bII} = 1.40 \cdot 13 \cdot 2.5^2 = 114$  cm, por ser un anclaje en patilla, esa longitud puede reducirse un 30%. La longitud en la que ha de prolongarse en horizontal la armadura de la pila, al llegar a la cara superior del cabecero, será por tanto  $l_{bII\ nec} = 80$  cm.

## 5. ARMADO

Además de la armadura principal constituida por los  $18\phi 25$  situados en la cara superior del cabecero, y los  $14\phi 25$  de cada cara lateral del fuste, se dispone la armadura bajo apoyos necesaria y la armadura de piel del elemento, que se indican en la figura EP2.14.

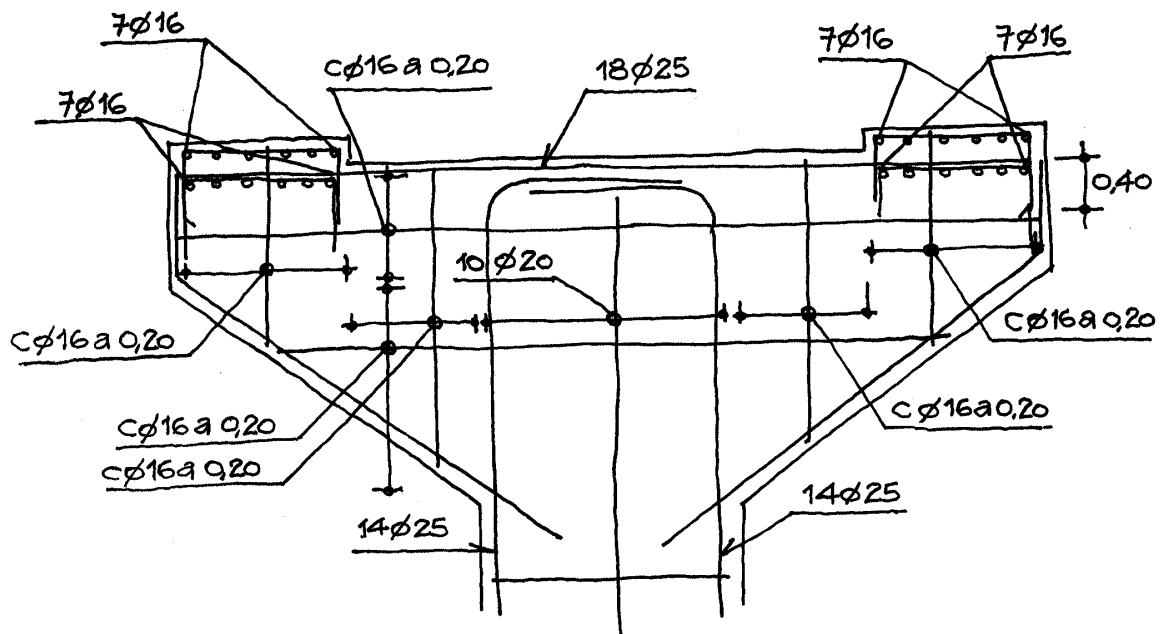


Figura EP2.14